Sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie résolubles

Gaël Meigniez

Gaël Meigniez

Sous-Groupes de Génération Compacte des Groupes de Lie Résolubles

Juin 1992 **N°33**

UNIVERSITE PARIS 7 - U.F.R de Mathématiques
C.N.R.S - Unité de Recherche Associée 212 - "Théories Géométriques"
Aile 45-55 - 5ème étage
2, Place Jussieu F.75251 PARIS cedex 05

FAX : (33.1) 44 27 69 35

Sous-Groupes de Génération Compacte des Groupes de Lie Résolubles

Gaël Meigniez

Soient G un groupe de Lie (dans cet article, ces mots signifient "groupe de Lie réel connexe") et Γ un sous-groupe de type fini . Supposons Γ *uniforme*, c'est-à-dire qu'il existe une partie compacte K de G tel que $\Gamma K = G$. Mais ne supposons pas Γ discret – les questions débattues ici sont triviales quand Γ est discret .

Choisissons pour Γ une partie génératrice finie $\mathcal{G}$. On appelle *trace* d'un mot $\gamma_1 ... \gamma_n$, où $\gamma_i \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$, l'ensemble des $n+1$ produits partiels 1 , γ_1 , $\gamma_1\gamma_2$, $\cdots$, $\gamma_1 \cdots \gamma_n$.

Définition — *Γ est de génération compacte dans G si pour toute partie compacte K de G il existe une partie compacte K' de G tel que tout élément de $\Gamma \cap K$ puisse être écrit comme un mot dont la trace est contenue dans K' .*

On vérifie facilement que cette propriété ne dépend pas du choix de la partie génératrice finie $\mathcal{G}$.

Le but de cet article est d'établir un critère pratique pour reconnaître les sous-groupes de génération compacte dans les groupes de Lie *résolubles* .

La notion de génération compacte a été d'abord définie par A. Haefliger dans le cadre plus général des pseudogroupes d'isométries : voir [Hae2] . La définition dans le cadre restreint des sous-groupes d'un groupe de Lie, que nous avons énoncée ci-dessus, a été obtenue par Y. Carrière dans ses travaux sur la dynamique transverse des feuilletages riemanniens : [C1], [C2] .

L'intérêt porté à cette notion a sa source dans l'étude des *G-feuilletages de Lie* des variétés compactes . On trouvera en appendice à ce papier quelques éléments sur ces objets . A chacun d'eux est attaché son *groupe d'holonomie* , qui est un sous-groupe de type fini uniforme dans G . Le problème central dans la classification de ces feuilletages est d'établir la liste des sous-groupes de G qui apparaissent comme groupe d'holonomie de l'un d'eux . La génération compacte intervient comme une condition nécessaire :

Proposition *(Haefliger) — Si Γ est le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie d'une variété compacte, alors il est de génération compacte dans G .*

Question *(Haefliger) — La réciproque est-elle vraie ?*

Ce sont cette proposition (dont on trouvera une démonstration dans l'appendice B) et cette question ouverte (que nous ne résolvons pas) qui motivent la présente étude .

La lecture de cet article ne suppose aucune connaissance des feuilletages de Lie, qui n'en sont pas le sujet . Le lecteur qui ne feuillette guère préférera peut-être retenir comme motivation le cas particulier suivant de la proposition précédente :

Supposons un autre groupe de Lie H contenant un sous-groupe *discret* cocompact (c'est-á-dire uniforme) Γ_H, et un homomorphisme surjectif p de H sur G . Alors $p(\Gamma_H)$ est de génération compacte dans G . En d'autres termes, la génération compacte est une condition nécessaire pour être l'image d'un sous-groupe discret cocompact d'un autre groupe de Lie . Cependant l'un des corollaires du présent travail sera que cette condition n'est pas suffisante (exemple VI.5) .

Notre critère fait intervenir les *racines* de G . Désignons par g et d l'algèbre de Lie et la dimension de G . Rappelons que le théorème de Lie pour les groupes résolubles énonce que l'algèbre de Lie complexe $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} g$ admet une suite de Jordan-Hölder d'idéaux, $0 = g_0 \subset \ldots \subset g_d = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} g$ telle que $g_i/g_{i-1} \cong \mathbf{C}$. La représentation adjointe induit d homomorphismes $\rho_i : G \to \mathrm{aut}_{\mathbf{C}}(g_i/g_{i-1}) \cong \mathbf{C}^*$: les racines de G .

Considérons les sous-groupes $G_i = \exp(g_i \cap g) \subset G$. Nous dirons que ρ_i est Γ-*critique* si $G_i \cap (\Gamma \cap G')$

n'est pas contenu dans $G_{i-1}(\Gamma \cap G')'$ (l'apostrophe désigne le sous-groupe dérivé, engendré par les commutateurs) .

Pour chaque homomorphisme $\chi : G \to \mathbf{R}$ continu non nul, on considère le "demi-groupe" ouvert $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$, et l'image $\rho_i(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[))$ qui est un sous-ensemble de $\mathbf{C}$. Si le nombre complexe 1 est combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho_i(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[))$, et ceci pour tout homomorphisme $\chi : G \to \mathbf{R}$ continu non nul, alors nous dirons que le triplet (G, Γ, ρ_i) est *unifère* .

Noter qu'une combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho_i(\Gamma)$ n'est rien d'autre qu'un polynôme de Laurent à coefficients entiers en les nombres complexes $\rho_i(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{G}$ — donc la propriété ci-dessus parle de relations algébriques entre les racines des générateurs de Γ .

Théorème A — *Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme de type fini . Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) Γ est de génération compacte .
b) Pour chaque racine ρ_i de G, si ρ_i est Γ-critique, alors (G, Γ, ρ_i) est unifère .

Le lecteur peut se reporter dès maintenant à l'appendice A où nous traitons en détail plusieurs exemples d'application de ce critère .

En outre, les questions débattues ici sont étroitement liées à l'invariant Σ^1 introduit et étudié par Bieri-Neumann-Strebel, voir [BNS] . Nous ne le ferons pas dans cet article, mais en employant nos méthodes on pourrait montrer que la condition b) peut être remplacée par la condition suivante :
Pour tout homomorphisme $\chi : G \to \mathbf{R}$ continu non nul, $\chi|_\Gamma \in \Sigma^1(\Gamma)$.

Après avoir démontré le théorème A, nous en déduirons les corollaires suivants . Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme de type fini .

Corollaire VI.1 — *Si G est nilpotent, alors Γ est de génération compacte .*

En fait, comme l'a remarqué Haefliger dans [Hae1], il résulte des travaux de Malcev (voir [R]) que Γ est dans ce cas l'image d'un sous-groupe discret cocompact Γ_H dans un groupe de Lie nilpotent H par un homomorphisme surjectif de H sur G .

Plus généralement, on a le :

Corollaire VI.3 — *Si Γ est polycyclique, alors il est de génération compacte . Plus généralement, si Γ contient un sous-groupe polycyclique uniforme dans G, alors Γ est de génération compacte .*

Rappelons qu'un groupe Γ est *polycyclique* s'il s'obtient à partir du groupe trivial par un nombre fini d'extensions cycliques, finies ou infinies . Dans le cas d'un sous-groupe de type fini de G, cela revient à dire que son groupe dérivé Γ' est également de type fini . Ce corollaire généralise le précédent car un groupe nilpotent de type fini est toujours polycyclique .

Cependant notre théorème montre qu'il y a des groupes de génération compacte qui ne contiennent point de sous-groupe polycyclique uniforme : voir l'exemple VI.5, et à l'appendice A les cas 4 et 5 de l'exemple A.1 .

Demandons-nous maintenant si dans un groupe de Lie G résoluble non nilpotent, les sous-groupes de génération compacte sont "nombreux".

Pour chaque n-uplet $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$, notons $\langle \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$ le sous-groupe de G qu'ils engendrent . On rappelle que pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$ est dense dans G contient un ouvert dense dans G^n .

Corollaire VI.4 — *On suppose que G n'est pas nilpotent. Alors pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$ est de génération compacte est un ensemble rare mais dense dans G^n .*

Ici *rare* signifie *contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide* . Mais si G est un groupe de Lie *algébrique* réel, la même proposition est vraie en prenant *rare* au sens de Zariski .

Au contraire la génération compacte est une condition ouverte lorsqu'on déforme le sous-groupe Γ *sans modifier sa structure de groupe abstrait* . De façon précise, munissons Γ de la topologie discrète et $\hom(\Gamma, G)$ de la topologie usuelle (celle de la convergence simple) . L'inclusion *id* de Γ dans G est un point de cet espace .

Corollaire VI.6 — *Si Γ est de génération compacte dans G, alors pour tout $\phi \in \hom(\Gamma, G)$ assez proche de id, le groupe $\phi(\Gamma)$ est de génération compacte dans G .*

Ce travail n'aurait pas existé sans les conversations où Etienne Ghys m'a expliqué la problématique des groupes de génération compacte . J'ai également profité de discussions fructueuses et stimulantes avec André Haefliger . Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail . Je remercie aussi Yves Benoist qui a bien voulu me guider dans les groupes de Lie résolubles, et l'Institut de Mathématiques de l'Université de Genève de sa chaleureuse hospitalité .

I — Préliminaires

Notations

Dans tout groupe G, nous noterons 1 l'élément neutre . Par convention ce sera la valeur de tout produit à 0 facteurs d'éléments de G .

Quels que soient $\alpha, \beta \in G$, nous noterons :

$$\alpha^\beta = \beta\alpha\beta^{-1}$$
$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$$

Quels que soient $A, B \subset G$, nous noterons :

$$AB = \{\alpha\beta / \alpha \in A \textit{ et } \beta \in B\}$$
$$A^{-1} = \{\alpha^{-1} / \alpha \in A\}$$
$$A^B = \{\alpha^\beta / \alpha \in A \textit{ et } \beta \in B\}$$
$$[A, B] = \{[\alpha, \beta] / \alpha \in A \textit{ et } \beta \in B\}$$

Nous noterons $\langle A \rangle$ le sous-groupe de G engendré par A .

Nous noterons $\langle A \rangle_B$ l'ensemble des $\gamma \in G$ qui s'écrivent d'une manière au moins comme un produit : $\gamma = \alpha_1 ... \alpha_n$ tel que $n \geq 0$, que chaque $\alpha_i \in A \cup A^{-1}$ et que, pour chaque $m \in \{0, ..., n\}$, le produit partiel $\alpha_1 ... \alpha_m$ appartient à B .

Nous noterons $\mathbf{Z}[G]$ l'anneau du groupe G . Les éléments de $\mathbf{Z}[G]$ seront qualifiés de *chaînes* . On appelle support de $c = \sum_{\gamma \in G} n_\gamma \gamma \ \in \mathbf{Z}[G]$ l'ensemble $\operatorname{spt}(c) = \{ \ \gamma \in G \ / \ n_\gamma \neq 0 \ \}$. Tout homomorphisme ϕ de G dans le groupe A^* des unités d'un anneau A s'étend de façon unique en un homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[G]$ dans A, encore noté ϕ .

Nous noterons $G' = \langle [G, G] \rangle$ le sous-groupe dérivé de G et $G'' = (G')'$ le deuxième sous-groupe dérivé . La notation $G^{(k)}$ désignera le k-ième terme de la *suite centrale descendante*, définie par $G^{(0)} = G$ et $G^{(k+1)} = \langle [G^{(k)}, G] \rangle$.

Si G est un groupe de Lie, nous noterons $\mathcal{K}(G)$ l'ensemble des parties compactes de G et $\hom(G, \mathbf{R})$ (respectivement $\hom(G, \mathbf{C}^\star)$) l'ensemble des homomorphismes continus de G dans $\mathbf{R}$ (respectivement $\mathbf{C}^\star$) .

Triplets unifères

Soient G un groupe de Lie résoluble, Γ un sous-groupe uniforme — qui peut ne pas être de type fini, et M un Γ-module — c'est-à-dire un module sur l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma]$.

Soient c, c' deux éléments de $\mathbf{Z}[\Gamma]$. Nous dirons que c opère comme c' sur M si $c \cdot m = c' \cdot m$ pour tout $m \in M$. Nous dirons que c opère identiquement sur M si elle opère comme 1 . Nous dirons que c annule M si elle opère comme 0 .

Définition I.1 — *Le triplet* (G, Γ, M) *est unifère si, pour tout* $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ *non nul, il existe* $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ *à support dans* $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ *qui opère identiquement sur* M .

Par exemple, si M est un Γ-module trivial, c'est-à-dire si $\gamma \cdot m = m$ quels que soient $\gamma \in \Gamma$ et $m \in M$, alors (G, Γ, M) est unifère .

Tout homomorphisme $\rho : \Gamma \to \mathbf{C}^*$, munit $\mathbf{C}$ d'une structure de Γ-module : $\gamma \cdot z = \rho(\gamma)z$. Nous noterons $\mathbf{C}_\rho$ ce Γ-module, et nous dirons que (G, Γ, ρ) est unifère pour dire que $(G, \Gamma, \mathbf{C}_\rho)$ est unifère . On retrouve ainsi la définition de l'introduction .

II — Quatre lemmes concernant les triplets unifères

Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme — qui peut ne pas être de type fini .

Notre premier lemme et ses corollaires sont des remarques élémentaires que nous emploierons beaucoup dans la démonstration du théorème A .

Lemme II.1 — *Soit une suite exacte courte de* Γ*-modules :*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

(G, Γ, M_2) *est unifère si et seulement si* (G, Γ, M_1) *et* (G, Γ, M_3) *le sont .*

Le sens "seulement si" est évident . Si réciproquement (G, Γ, M_1) et (G, Γ, M_3) sont unifères, c'est-à-dire que pour chaque $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ non nul il existe c_1, $c_3 \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ tels que c_1 opère identiquement sur M_1 ainsi que c_3 sur M_3, alors $1 - c_1$ annule M_1 et $1 - c_3$ annule M_3, si bien que $(1-c_1)(1-c_3) = 1-(c_1+c_3-c_1c_3)$ annule M_2, et donc $c_2 = c_1 + c_3 - c_1c_3$ opère identiquement sur M_2 . Comme $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ est un sous-monoïde de G, il est clair qu'il contient le support de c_2 .

Corollaire II.2 — *La condition b) du théorème : "pour chaque racine* ρ_i *de* G*, si* ρ_i *est* Γ*-critique, alors* (G, Γ, ρ_i) *est unifère" est équivalente à la suivante : "*$(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ *est unifère" .*

En effet, les Γ-modules $M_i = (\Gamma \cap G' \cap G_i)/(\Gamma \cap G')'$ forment une suite de composition de $(\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')'$.

Quand ρ_i n'est pas Γ-critique, le quotient M_i/M_{i-1} est nul .

Quand ρ_i est Γ-critique, M_i/M_{i-1} est un sous-module non nul de G_i/G_{i-1}, qui est un quotient de $(g_i \cap g)/(g_{i-1} \cap g)$, qui est un sous-module de g_i/g_{i-1}, qui est isomorphe à $\mathbf{C}_{\rho_i}$: il est clair que (G, Γ, ρ_i) est unifère si et seulement si $(G, \Gamma, M_i/M_{i-1})$ l'est . Le corollaire résulte donc évidemment du lemme II.1 et d'une récurrence sur d .

Nous emploierons plusieurs fois la remarque suivante, qui résulte trivialement du lemme II.1 .

Corollaire II.3 — *Soient* A, B, U, V, X *cinq sous-groupes normaux de* Γ, *tels que* $A \subset U \subset V \subset B$ *et* $A \subset X \subset B$ *et que* V/U, X/A, B/X *sont abéliens . Si* $(G, \Gamma, X/A)$ *et* $(G, \Gamma, B/X)$ *sont unifères, alors* $(G, \Gamma, V/U)$ *est unifère .*

Notre deuxième lemme est de nature géométrique et donne un nouveau sens au mot "unifère"; il forme, avec le lemme de relèvement, le cœur de la démonstration de l'implication $b) \Rightarrow a)$ du théorème A .

Lemme II.4 — *Soit M un Γ-module quelconque. (G, Γ, M) est unifère si et seulement si il existe $K \in \mathcal{K}(G)$ tel que quel que soit $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, il existe $c' \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans KG' et qui opère comme c sur M .*

Le sens "si" est facile à démontrer mais nous ne l'emploierons pas . Démontrons le sens "seulement si" qui est le véritable contenu de ce lemme .

Notons $G_{ab} = G/G'$ et $p : G \to G_{ab}$ la projection canonique et T le sous-groupe compact connexe maximal de G_{ab} et V le quotient G_{ab}/T et $q : G_{ab} \to V$ la projection canonique et $r = q \circ p : G \to V$. Munissons V, qui est isomorphe à un espace vectoriel réel de dimension finie, d'un produit scalaire euclidien quelconque, noté $(v, w) \mapsto v \cdot w$. Notons $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ la norme associée et $B_R = \{ v \in V \ / \ \|v\| \leq R \}$ la boule de rayon R et $S = \{ v \in V \ / \ \|v\| = 1 \}$ la sphère unité .

Pour chaque $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, considérons dans S le sous-ensemble ouvert :

$$S_c = \{ v \in S \ / \ v \cdot w > 0 \text{ pour tout } w \in r(\mathrm{spt}(c)) \}$$

La propriété "(G, Γ, M) est unifère" signifie que quand c parcourt l'ensemble des chaînes qui opèrent identiquement sur M, les ouverts S_c recouvrent S . Extrayons-en un recouvrement fini : $S = S_{c_1} \cup S_{c_2} \cup \ldots \cup S_{c_n}$. En d'autres termes il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que :

Quel que soit $v \in S$ il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que quel que soit $w \in r(\mathrm{spt}(c_i))$ on ait $v \cdot w > \epsilon$.

On considère maintenant la fonction "produit scalaire avec v" comme la *fonction de Busemann* attachée à la demi-droite de V portée par v . En d'autres termes, on remarque que quels que soient $v \in S$ et $w \in V$ on a :

$$v \cdot w = \lim_{R \to +\infty} R - \|Rv - w\|$$

De plus cette limite est croissante . On en déduit aisément que si R est assez grand alors dans la propriété énoncée précédemment on peut remplacer $v \cdot w$ par $R - \|Rv - w\|$:

Il existe $R_0 \in \mathbf{R}$ tel que quel que soit $R \geq R_0$ et quel que soit $v \in S$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que quel que soit $w \in r(\mathrm{spt}(c_i))$ on ait $R - \|Rv - w\| > \epsilon$.

Soit γ un élément quelconque de Γ . Supposons que $\|r(\gamma)\| > R_0$. Notons $R = \|r(\gamma)\|$. Nous allons voir qu'il existe une chaîne à support dans $r^{-1}(B_{R-\epsilon})$ qui opère comme γ sur M .

Le vecteur $v = -r(\gamma)/R$ appartient à S, donc il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que quel que soit $w \in r(\mathrm{spt}(c_i))$ on ait $R - \|Rv - w\| > \epsilon$. En d'autres termes $r(\mathrm{spt}(c_i))$ est contenu dans la boule de centre Rv et de rayon $R - \epsilon$. Translatons du vecteur $r(\gamma) = -Rv$: l'ensemble $r(\gamma) + r(\mathrm{spt}(c_i)) = r(\mathrm{spt}(\gamma c_i))$ est contenu dans la boule de centre $Rv - Rv = 0$ et de rayon $R - \epsilon$. Comme c_i opère identiquement sur M, la chaîne γc_i opère comme γ sur M .

En appliquant répétitivement ce procédé, on obtient que pour toute chaîne c, il existe une chaîne à support dans $r^{-1}(B_{R_0})$ qui opère comme c sur M . Prenons pour K une partie compacte de G telle que $p(K)$ contient $q^{-1}(B_{R_0})$: le saturé KG' contient $r^{-1}(B_{R_0})$, ce qui démontre le lemme II.4 .

Remarque concernant le lemme II.4 — La même construction joue un rôle important dans l'étude de l'invariant Σ^1 des groupes métabéliens : [BS], *lemma 1.1* .

Notre troisième lemme et ses corollaires sont des remarques élémentaires . Ils montrent comment dans certaines situations simples décider si (G, Γ, ρ) est unifère ou non par simple examen de $\rho(\Gamma)$, sous-groupe de $\mathbf{C}^\star$.

Lemme II.5 — *Soit une suite exacte courte de groupes de Lie résolubles :*

$$1 \to G_1 \hookrightarrow G_2 \xrightarrow{p} G_3 \to 1$$

(On ne suppose pas G_1 connexe) .

Soient Σ un sous-groupe de G_2 et $\rho \in \hom(G_3, \mathbf{C}^\star)$. On suppose que $\Sigma \cap G_1$ est uniforme dans G_1 . Alors $(G_2, \Sigma, \rho \circ p)$ est unifère si et seulement si $(G_3, p(\Sigma), \rho)$ est unifère .

Le sens "seulement si" est évident . Démontrons le sens "si" . Soit χ un élément quelconque non nul de $\hom(G_2, \mathbf{R})$. Il y a deux cas .

Premier cas : $G_1 \subset \ker(\chi)$. Il existe donc $\psi \in \hom(G_3, \mathbf{R})$ tel que $\chi = \psi \circ p$. Comme $(G_3, p(\Sigma), \rho)$ est unifère, il existe $c \in \mathbf{Z}[p(\Sigma)]$ tel que $\mathrm{spt}(c) \subset \psi^{-1}(]0, +\infty[)$ et $\rho(c) = 1$. Notons-la $c = \sum_{\sigma \in p(\Sigma)} n_\sigma \sigma$.

Choisissons un élément σ' dans chaque fibre $\Sigma \cap p^{-1}(\sigma)$ et posons $c' = \sum_{\sigma \in p(\Sigma)} n_\sigma \sigma'$: c'est un élément de $\mathbf{Z}[\Sigma]$ tel que $\mathrm{spt}(c') \subset \chi^{-1}(]0,+\infty[)$ et $\rho \circ p(c') = 1$.

Second cas : $G_1 \not\subset \ker(\chi)$. Comme $\Sigma \cap G_1$ est uniforme dans G_1, il existe un élément σ de $\Sigma \cap G_1$ qui appartient aussi à $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$. La chaîne $c = \sigma \in \mathbf{Z}[\Sigma]$ est à support dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$ et $\rho \circ p(c) = 1$.

Conclusion : $(G_2, \Sigma, \rho \circ p)$ est unifère .

Rappelons qu'une *unité algébrique* est un nombre complexe non nul qui est un entier algébrique sur $\mathbf{Z}$, et dont l'inverse est aussi un entier algébrique sur $\mathbf{Z}$.

Corollaire II.6 — *Soit $\rho \in \hom(G, \mathbf{C}^\star)$.*

Si tous les éléments de $\rho(\Gamma)$ sont des unités algébriques, alors (G, Γ, ρ) est unifère .

Si (G, Γ, ρ) est unifère et si $\rho(\Gamma)$ est un groupe cyclique (fini ou infini), alors tous ses éléments sont des unités algébriques .

Supposons d'abord que les éléments de $\rho(\Gamma)$ sont des unités algébriques et démontrons que (G, Γ, ρ) est unifère . Donnons-nous un $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ quelconque non nul . Choisissons un $\gamma \in \Gamma \cap \chi^{-1}(]0,+\infty[)$. Le nombre complexe $\rho(\gamma)$ est racine d'un polynôme P à coefficients entiers dont le coefficient constant $P(0)$ vaut 1 . Formons la chaîne $c = 1 - P(\gamma)$ (ici 1 désigne l'élément neutre de Γ) : on a $\rho(c) = 1$. Comme c est combinaison linéaire entière de puissances *strictement* positives de γ, son support est contenu dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$.

Supposons maintenant que (G, Γ, ρ) est unifère et que $\rho(\Gamma)$ est cyclique, et démontrons que ses éléments sont des unités algébriques . Quitte à remplacer G par son revêtement universel et Γ par son image inverse dans ce revêtement, nous pouvons supposer G simplement connexe (lemme II.5) .

Distinguons deux cas, suivant la nature de $\rho(G)$. Les sous-groupes de Lie de $\mathbf{C}^\star$ sont : $\{1\}$, $\{z \in \mathbf{C}^\star / |z| = 1\}$ (qui sont compacts), les autres sous-groupes à 1 paramètre, et $\mathbf{C}^\star$ (qui ne sont pas compacts) .

Premier cas : $\rho(G)$ n'est pas compact . Posons $\chi = \log(|\rho|)$: c'est un homomorphisme continu non nul de G dans $\mathbf{R}$, donc il existe $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$ telle que $\rho(c) = 1$. Choisissons $\gamma \in \chi^{-1}(]0,+\infty[)$ tel que $\rho(\gamma)$ engendre $\rho(\Gamma)$ et identifions l'anneau de groupe $\mathbf{Z}[\rho(\Gamma)]$ à l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers, $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]$, en posant $X = \rho(\gamma)$. Soit P l'image de c dans $\mathbf{Z}[X, X^{-1}]$: il ne contient que des monômes de degré strictement positif, et $P(\rho(\gamma)) = 1$. Ceci montre que $\rho(\gamma)^{-1}$ est un entier algébrique . Un raisonnement semblable avec $\chi = -\log(|\rho|)$ montre que $\rho(\gamma)$ est également un entier algébrique .

Second cas : $\rho(G)$ est compact . Ecartons le cas trivial où $\rho(G) = \{1\}$, et plus généralement le cas trivial où $\rho(\Gamma)$ est fini . On a $\rho(G) = \{z \in \mathbf{C}^\star / |z| = 1\}$. Comme nous avons supposé G simplement connexe il existe $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ tel que $\rho = e^{i\chi}$. Un raisonnement semblable au précédent avec cet homomorphisme non nul montre que $\rho(\gamma)^{-1}$ est un entier algébrique, donc une unité algébrique .

Corollaire II.7 — *Soit $\rho \in \hom(G, \mathbf{C}^\star)$. On suppose que $\Gamma \cap \ker(\rho)$ est uniforme dans $\ker(\rho)$. Alors (G, Γ, ρ) est unifère si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vraie :*

i) $\rho(G)$ est compact — c'est-à-dire égal à $\{1\}$ ou au cercle $\{z \in \mathbf{C}^\star / |z| = 1\}$.

ii) Le nombre complexe 1 est combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho(\Gamma) \cap \{z \in \mathbf{C}^\star / |z| < 1\}$. Il est aussi combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho(\Gamma) \cap \{z \in \mathbf{C}^\star / |z| > 1\}$.

En effet, d'après le lemme II.5, (G, Γ, ρ) est unifère si et seulement si $(\rho(G), \rho(\Gamma), id)$ l'est . Or $\hom(\rho(G), \mathbf{R})$ est réduit à $\{0\}$ si $\rho(G)$ est compact, et à la droite vectorielle engendrée par $z \mapsto \log(|z|)$ si $\rho(G)$ n'est pas compact, ce qui ramène aux conditions i) et ii) .

Exemple II.8 — Au vu du corollaire précédent on peut se demander si la propriété "(G, Γ, ρ) est unifère" ne serait pas *toujours* équivalente à la disjonction des conditions i) et ii), que $\Gamma \cap \ker(\rho)$ soit ou non uniforme dans $\ker(\rho)$. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas .

Soient G le groupe des matrices 2×2 réelles triangulaires supérieures dont les éléments diagonaux sont strictement positifs, Γ le sous-groupe (uniforme, de type fini) engendré par :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ρ l'unique racine non triviale de G, qui à chaque matrice associe le quotient de ses éléments diagonaux . La condition ii) est vérifiée puisque $1 = 3 - 2$ et $1 = 2^{-1} + 2^{-1}$. Mais (G, Γ, ρ) n'est pas unifère : soit :

$$\chi : \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto \log(x)$$

On ne peut pas écrire 1 comme combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0, +\infty[))$ car ce sont des rationnels de la forme $2^p 3^q$ avec p entier et q entier strictement positif .

Notre quatrième lemme sera employé dans la démonstration de $b) \Rightarrow a)$, dans le seul cas où Γ n'est pas dense dans G . Il peut être omis en première lecture .

Lemme II.9. — *Soit ρ un homomorphisme continu de G dans $\mathbf{C}^*$. Soit H un sous-groupe de G fermé, connexe, contenant G', et tel que ΓH est fermé dans G . Si (G, Γ, ρ) est unifère, alors $(H, \Gamma \cap H, \rho|_H)$ est unifère .*

Commençons par le cas où G est simplement connexe . Alors il existe un homomorphisme continu $\pi : G \to \mathbf{R}^n$ tel que $Ker(\pi) = H$ et $\pi(\Gamma) = \mathbf{Z}^n$. En procédant par récurrence sur n, on se ramène au cas $n = 1$.

Choisissons un élément $\xi \in \Gamma$ tel que $\pi(\xi) = 1$. Chaque $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ s'écrit donc de façon unique sous la forme :

$$c = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \xi^i$$

où les $c_i \in \mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$ sont presque tous nuls .

Fixons un $\chi \in \hom(H, \mathbf{R})$ non nul . L'élément de $\mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$ que nous devons exhiber sera le résultant de deux éléments a, b judicieusement choisis dans $\mathbf{Z}[\Gamma]$, et considérés comme des polynômes en ξ .

D'après le lemme II.4, il existe $K \in \mathcal{K}(G)$ tel que pour toute chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, il existe une chaîne $c' \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ à support dans KG' telle que $\rho(c') = \rho(c)$. Par ailleurs, comme nous avons pris la précaution de supposer G simplement connexe, χ s'étend en un homomorphisme continu de G dans $\mathbf{R}$, encore noté χ . Soient N un entier plus grand strictement que le maximum de $|\pi|$ sur KG', et R un réel plus grand que le maximum de $|\chi|$ sur KG'. Il est clair que $\Gamma \cap H$ est uniforme dans H, choisissons donc un $\eta \in \Gamma \cap H$ tel que $\chi(\eta)$ est grand devant N, R et $\chi(\xi)$ — la condition précise est : $\chi(\eta) > R + N|\chi(\xi)|$. Pour chaque couple d'entiers (p, q), soit $c_{p,q} \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ une chaîne à support dans KG' telle que $\rho(c_{p,q}) = \rho(\xi^p \eta^q)$. On forme les chaînes :

$$a = 1 - \xi^N \eta (c_{N,1} + c_{-N,-1}) + \xi^{2N} \eta^2$$

$$b = 1 - \xi^N \eta^{-1} (c_{-N,1} + c_{N,-1}) + \xi^{2N} \eta^{-2}$$

Soit la matrice carrée $4N \times 4N$ suivante, à coefficients dans $\mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$:

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & \dots & a_{2N-1} & a_{2N} & & & & \\
& a_0 & a_1 & \dots & a_{2N-1} & a_{2N} & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
& & & a_0 & a_1 & \dots & a_{2N-1} & a_{2N} & \\
b_0 & b_1 & \dots & b_{2N-1} & b_{2N} & & & & \\
& b_0 & b_1 & \dots & b_{2N-1} & b_{2N} & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
& & & b_0 & b_1 & \dots & b_{2N-1} & b_{2N} &
\end{pmatrix}$$

Son déterminant n'est pas bien défini, l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$ n'étant pas commutatif . Toutefois, notons $m_{i,j}$ le terme qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, et considérons les chaînes :

$$r = \sum_{\sigma \in S_{4N}} \epsilon_\sigma m_\sigma$$

$$r' = \sum_{\sigma \neq id} \epsilon_\sigma m_\sigma$$

où S_{4N} désigne le groupe symétrique à $4N$ lettres, ϵ_σ désigne la signature de la permutation σ et m_σ désigne le produit $m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{4N,\sigma(4N)}$ et id désigne la permutation identique .

L'élément de $\mathbf{Z}[\Gamma \cap H]$ cherché est $-\eta^{4N} r'$.

Montrons d'abord que $\rho(-\eta^{4N} r') = 1$.

On a $m_{id} = {a_0}^{2N} {b_{2N}}^{2N} = \eta^{-4N}$, donc il s'agit de prouver que $\rho(r) = 0$.

Soit l'homomorphisme d'anneaux :

$$h : \mathbf{Z}[\Gamma] \to \mathbf{C}[X, X^{-1}] : c \mapsto \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \rho(c_i) X^i$$

Dans $h(c_{p,q})$ le degré de chaque monôme est compris strictement entre $-N$ et $+N$; il en résulte que dans $h(a)$ (respectivement $h(b)$) les monômes de plus petit et de plus grand degré sont $a_0 = 1$ et $a_{2N} X^{2N} = \rho(\eta^2) X^{2N}$ (resp. $b_0 = 1$ et $b_{2N} X^{2N} = \rho(\eta^{-2}) X^{2N}$) . En particulier $h(a)$ et $h(b)$ sont de vrais polynômes (aucun monôme n'est de degré strictement négatif) et ils ont même degré $2N$. Or $\rho(r)$ est le résultant de $h(a)$ et $h(b)$ puisque ρ est un homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ dans $\mathbf{C}$. Il suffit donc de montrer que $h(a)$ et $h(b)$ ont une racine commune .

De fait, en notant $x = \rho(\xi)$ et $y = \rho(\eta)$ on a :

$$h(a)(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \rho(a_i) \rho(\xi)^i = \rho(a) = 1 - x^N y (x^N y + x^{-N} y^{-1}) + x^{2N} y^2 = 0$$

$$h(b)(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \rho(b_i) \rho(\xi)^i = \rho(b) = 1 - x^N y^{-1} (x^{-N} y + x^N y^{-1}) + x^{2N} y^{-2} = 0$$

Montrons maintenant que $-\eta^{4N} r'$ est à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$, c'est-à-dire que r' est à support dans $\chi^{-1}(]\chi(\eta^{-4N}), +\infty[)$.

Chaque élément γ du support de r' appartient au support d'un m_σ avec $\sigma \neq id$, donc s'écrit $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_{4N}$ avec $\gamma_1 \in \operatorname{spt}(m_{1,\sigma(1)}), \dots \gamma_{4N} \in \operatorname{spt}(m_{4N,\sigma(4N)})$.

Pour chaque $i \in \{1, ..., 2N\}$, $m_{i,\sigma(i)} = a_{\sigma(i)-i}$. Examinons les valeurs de χ sur le support de a_k .

Le support de a_0 est $\{1\}$, le support de a_{2N} est $\{\eta^2\}$. Grâce à notre choix de η le réel $\chi(\eta^2)$ est strictement positif . Pour tout $k \in \{1, ..., 2N-1\}$, le support de a_k est contenu dans $\xi^{N-k} \eta K G'$. Sur cet ensemble les valeurs de χ sont supérieures ou égales à $\chi(\eta) + (N-k)\chi(\xi) - R$ qui grâce à notre choix de η est strictement positif .

En résumé $\chi(\gamma_i) \geq 0$, l'égalité n'étant réalisée que pour $\sigma(i) = i$.

Pour chaque $i \in \{2N+1, ..., 4N\}$, $m_{i,\sigma(i)} = b_{\sigma(i)-i+2N}$. Examinons les valeurs de χ sur le support de b_k .

Le support de b_0 est $\{1\}$. Grâce à notre choix de η, $\chi(1) = 0$ est $> \chi(\eta^{-2})$. Le support de b_{2N} est $\{\eta^{-2}\}$. Pour tout $k \in \{1, ..., 2N-1\}$, le support de b_k est contenu dans $\xi^{N-k}\eta^{-1}KG'$. Sur cet ensemble les valeurs de χ sont supérieures ou égales à $-\chi(\eta) + (N-k)\chi(\xi) - R$ qui grâce à notre choix de η est $> \chi(\eta^{-2})$.

En résumé $\chi(\gamma_i) \geq \chi(\eta^{-2})$, l'égalité n'étant réalisée que pour $\sigma(i) = i$.

Au total $\chi(\gamma) \geq 2N \times 0 + 2N \times \chi(\eta^{-2}) = \chi(\eta^{-4N})$ et l'égalité n'est pas réalisée puisque $\sigma \neq id$.

Passons au cas général, où G n'est peut-être pas simplement connexe . Désignons par $p : \bar{G} \to G$ un revêtement simplement connexe et par $\bar{H}$ la composante connexe neutre de $p^{-1}(H)$. Il est clair que $\bar{H}$ est un sous-groupe de $\bar{G}$ fermé et connexe, qu'il contient $\bar{G}'$, et que $p^{-1}(\Gamma)\bar{H} = p^{-1}(\Gamma H)$ est fermé . D'après le lemme II.5, du fait que (G, Γ, ρ) est unifère il résulte que $(\bar{G}, p^{-1}(\Gamma), \rho \circ p)$ l'est également . D'après l'étude précédente, $(\bar{H}, p^{-1}(\Gamma) \cap \bar{H} = p^{-1}(\Gamma \cap H), \rho \circ p|_{\bar{H}})$ l'est également . D'une nouvelle application du lemme II.5, on tire que $(H, \Gamma \cap H, \rho|_H)$ est également unifère .

III — Démonstration de l'implication a) ⇒ b) du théorème A

Fixons G et Γ comme dans les hypothèses du théorème A ; supposons Γ de génération compacte .

La démonstration requiert le choix précis d'une partie génératrice finie $\mathcal{G}$ pour Γ et d'une partie Γ-génératrice finie $\mathcal{A}$ pour Γ' .

Désignons par T le sous-groupe de Γ formé des éléments dont la classe modulo Γ' est de torsion dans Γ/Γ' : le groupe quotient Γ/T est donc abélien libre de type fini . Choissons dans Γ des éléments $\gamma_1, ..., \gamma_p$ dont les classes modulo T forment une base de Γ/T .

Choisissons aussi dans T des éléments $\gamma_{p+1}, ..., \gamma_q$ tels que T/Γ' est la somme directe des groupes cycliques engendrés respectivement par les classes de $\gamma_{p+1}, ..., \gamma_q$ modulo Γ' . Nous noterons ν_i l'ordre de la classe de γ_i modulo Γ' .

Au total $\Gamma = \langle\gamma_1, ..., \gamma_q\rangle\Gamma'$ (rappelons que $\langle\gamma_1, ..., \gamma_q\rangle$ désigne le sous-groupe engendré par $\gamma_1, ..., \gamma_q$) donc il existe des éléments de Γ' en nombre fini $\gamma_{q+1}, ..., \gamma_r$ tels que $\Gamma = \langle\gamma_1, ..., \gamma_r\rangle$. Notons :

$$\mathcal{G} = \{\gamma_1, ..., \gamma_r\}$$

$$\mathcal{A} = \{[\gamma_i^{\pm 1}, \gamma_j^{\pm 1}] \ / \ 1 \leq i,j \leq r\} \cup \{\gamma_i^{\nu_i} \ / \ p+1 \leq i \leq q\} \cup \{\gamma_i \ / \ q+1 \leq i \leq r\}$$

Fixons maintenant un $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ non nul .

Premier pas — Il existe un réel t tel que $\Gamma' = \langle\Gamma' \cap \langle\mathcal{G}\rangle_{\chi^{-1}(]t,+\infty[)}\rangle$.
(Pour cette notation, se reporter au paragraphe I) . Remarquons d'abord que :

Lemme III.1 — *Dans un groupe de Lie résoluble, tout sous-groupe possède une partie génératrice relativement compacte .*

Cela résulte d'une récurrence facile sur la dimension .

Choisissons donc un $K \in \mathcal{K}(G')$ (rappelons que $\mathcal{K}(G')$ désigne l'ensemble des parties compactes de G') tel que $\Gamma' = \langle\Gamma' \cap K\rangle$. Comme par hypothèse Γ est de génération compacte, il existe un $L \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\Gamma \cap K$ est contenu dans $\langle\mathcal{G}\rangle_L$.

Soit t un réel minorant strictement $\chi(L)$: alors L est contenu dans $\chi^{-1}(]t,+\infty[)$, donc $\langle\mathcal{G}\rangle_L$ est contenu dans $\langle\mathcal{G}\rangle_{\chi^{-1}(]t,+\infty[)}$ et donc $\Gamma' = \langle\Gamma' \cap \langle\mathcal{G}\rangle_{\chi^{-1}(]t,+\infty[)}\rangle$.

Nous pouvons évidemment supposer t strictement négatif, et le ferons désormais .

Deuxième pas — $\Gamma' = \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$.

Vu le résultat précédent, il suffit de prouver que pour tout *mot* w (= suite finie d'éléments de $\mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$, qui seront qualifiés de *lettres*), si la trace de w est contenue dans $\chi^{-1}(]t,+\infty[)$, et si l'élément γ_w de Γ représenté par w appartient au groupe dérivé Γ', alors $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$.

Le raisonnement qui suit est emprunté à [BNS] ; nous le reproduisons pour la commodité du lecteur .

Commençons par le cas particulier où la puissance totale de chaque élément de $\mathcal{G}$ dans le mot w est nulle . Et pour montrer dans ce cas que $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$, procédons par récurrence sur la longueur du mot w .

Quand cette longueur est nulle, l'élément γ_w est l'élément neutre et l'appartenance est donc triviale . Supposons donc la propriété vérifiée par tous les mots plus courts que w .

Désignons par ξ la plus à gauche des lettres de w dont l'image par χ est ≤ 0 . La lettre opposée ξ^{-1} doit elle aussi apparaître dans w, de sorte que w est de la forme $w_1\eta w_2\eta^{-1}w_3$, où $\eta = \xi$ ou ξ^{-1} . Ecrivons w_2 comme une suite de lettres : $w_2 = \xi_1...\xi_s$ où $s \geq 0$. Donc :

$$\gamma_w = w_1(\eta\xi_1\eta^{-1})(\eta\xi_2\eta^{-1})...(\eta\xi_s\eta^{-1})w_3$$

Soit encore :

$$\gamma_w = w_1[\eta,\xi_1]\xi_1[\eta,\xi_2]\xi_2[\eta,\xi_3]\xi_3...[\eta,\xi_s]\xi_s w_3$$

Ce qu'on peut encore exprimer ainsi :

$$\gamma_w = [\eta,\xi_1]^{w_1}[\eta,\xi_2]^{w_1\xi_1}[\eta,\xi_3]^{w_1\xi_1\xi_2}...[\eta,\xi_s]^{w_1\xi_1\xi_2...\xi_{s-1}}w_1w_2w_3$$

Les exposants de cette expression sont de la forme $w_1\tau$, où τ appartient à la trace de w_2 . Montrons que tout élément de cette forme appartient à $\chi^{-1}(]t,+\infty[)$.

Dans le cas où $\eta = \xi$, on a $\chi(\eta) \leq 0$ donc $\chi(w_1\tau) \geq \chi(w_1\eta\tau)$. Or $w_1\eta\tau$ appartient à la trace de w, donc $\chi(w_1\eta\tau) > t$ donc au total $\chi(w_1\tau) > t$.

Dans le cas contraire : $\eta = \xi^{-1}$, dans le mot w les sous-mots w_1 et w_2 sont situés à gauche de ξ, donc chaque lettre apparaissant dans w_1 ou w_2 est d'image par χ strictement positive, donc $\chi(w_1\tau) \geq 0$, donc $\chi(w_1\tau) > t$.

Donc dans l'expression ci-dessus chaque facteur de la forme $[\eta,\xi_s]^{w_1\tau}$ appartient au sous-groupe $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$.

Reste le facteur $\gamma_{w_1w_2w_3}$ représenté par le mot $w_1w_2w_3$, auquel nous aimerions appliquer l'hypothèse de récurrence . Sa longueur est bien inférieure de 2 à celle de w ; et la puissance totale de chaque lettre y est bien nulle . Montrons que sa trace est contenue dans $\chi^{-1}(]t,+\infty[)$. Soit σ un élément quelconque de la trace de $w_1w_2w_3$. Il y a trois cas :

Premier cas : σ appartient à la trace de w_1 . Alors σ appartient aussi à la trace de w, donc appartient bien à $\chi^{-1}(]t,+\infty[)$.

Deuxième cas : σ est le produit de w_1 par un élément de la trace de w_2 . Nous avons montré plus haut que tout élément de cette forme appartient bien à $\chi^{-1}(]t,+\infty[)$.

Troisième cas : $\sigma = w_1w_2\tau$ où τ appartient à la trace de w_3 . Dans ce cas $\chi(\sigma) = \chi(w_1\eta w_2\eta^{-1}\tau)$ qui est bien $> t$ puisque $w_1\eta w_2\eta^{-1}\tau$ appartient à la trace de w .

L'hypothèse de récurrence entraîne donc que $\gamma_{w_1w_2w_3} \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$. Au total $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$, ce qu'il fallait démontrer .

Ne supposons plus maintenant que la puissance totale de chaque élément γ_i de $\mathcal{G}$ dans le mot w est nulle . Soit μ_i cette puissance . Comme $\gamma_w \in \Gamma'$, l'entier μ_i est nul pour $1 \leq i \leq p$ et divisible par ν_i pour $p+1 \leq i \leq q$. Considérons le mot $w' = w\gamma_{p+1}^{-\mu_{p+1}}\gamma_{p+2}^{-\mu_{p+2}}...\gamma_r^{-\mu_r}$.

Les générateurs $\gamma_{p+1},...,\gamma_r$ sont de torsion modulo Γ' donc ils sont dans le noyau de χ . Il en résulte immédiatement que les valeurs de χ sur la trace de w' coïncident avec les valeurs de χ sur la trace de w . De plus la puissance totale de chaque lettre dans w' est nulle . Donc d'après l'étude précédente $\gamma_{w'} \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$. Par ailleurs $\gamma_{p+1}^{-\mu_{p+1}},...,\gamma_r^{-\mu_r}$ appartiennent à $\langle \mathcal{A} \rangle$, donc aussi à $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$ qui est un ensemble plus grand. Au total $\gamma_w \in \langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$, ce qu'il fallait démontrer .

Troisième pas — Il existe une partie finie $\mathcal{B}$ de Γ' telle que $\Gamma' = \langle \mathcal{B}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0,+\infty[)} \rangle$.

En effet, Γ étant uniforme dans G, il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $\chi(\gamma) \leq t$. Donc $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]t,+\infty[)} \rangle$ est contenu dans $\langle \mathcal{A}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]\chi(\gamma),+\infty[)} \rangle$ qui est égal à $\langle \mathcal{A}^{(\Gamma \cap \chi^{-1}(]0,+\infty[))\gamma} \rangle$ qui est égal à $\langle \mathcal{B}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0,+\infty[)} \rangle$ où $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\gamma}$.

Quatrième pas — $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ *est unifère* .

Désignons par $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ la projection de Γ sur Γ/Γ' et par $\beta_1, ..., \beta_n$ les éléments de $\mathcal{B}$. Chaque β_i appartient à Γ' donc à $\langle \mathcal{B}^{\Gamma \cap \chi^{-1}(]0,+\infty[)} \rangle$. En projetant cette relation dans Γ/Γ' et en passant en notation additive, on obtient qu'il existe des chaînes $c_{ij} \in \mathbf{Z}[\Gamma]$, à support dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$, telles que :

$$\bar{\beta}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \bar{\beta}_j$$

(Noter que cette relation ne peut être la relation triviale $\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i$ car la chaîne 1 n'est pas à support dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$ puisque $\chi(1) = 0$) .

En d'autres termes, si l'on note δ_{ij} l'indice de Kronecker :

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - c_{ij}) \bar{\beta}_j = 0$$

Noter que l'action par automorphismes intérieurs de Γ' sur Γ'/Γ'' est triviale, donc que l'action de l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma]$ sur son module Γ'/Γ'' passe au quotient par l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$ (pour fixer les idées, si par exemple Γ/Γ' est un groupe abélien *libre* de rang n, alors son anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$ est isomorphe à l'anneau des séries de Laurent à n variables et à coefficients entiers) . Désignant par $c \mapsto \bar{c}$ la projection de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ sur $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$, on a pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$ la relation linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \bar{c_{ij}}) \bar{\beta}_j = 0$$

L'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma']$ étant commutatif, on dispose de la théorie des déterminants : considérons le déterminant $d = det(\delta_{ij} - \bar{c_{ij}})_{1 \leq i,j \leq n}$. En le développant, on trouve une expression de la forme $d = 1 - \bar{c}$ où c est une combinaison linéaire entière des c_{ij} et de leurs produits deux par deux, trois par trois, ..., n par n . Comme ces c_{ij} sont à support dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$, qui est une partie de G stable par multiplication, c est aussi à support dans $\chi^{-1}(]0,+\infty[)$.

Par ailleurs, les n relations linéaires précédentes impliquent que $d\bar{\beta}_i = 0$ pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$. En d'autres termes $c\bar{\beta}_i = \bar{\beta}_i$. Comme les $\bar{\beta}_i$ engendrent Γ'/Γ'' considéré comme un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module, il en résulte que c opère identiquement sur Γ'/Γ'' .

Comme χ était quelconque, on a bien prouvé que $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère .

Conclusion — Considérons les inclusions entre sous-groupes normaux de Γ : $\Gamma'' \subset (\Gamma \cap G')' \subset \Gamma \cap G' \subset \Gamma$ et $\Gamma'' \subset \Gamma' \subset \Gamma$. Le triplet $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère, nous venons de le montrer . Le triplet $(G, \Gamma, \Gamma/\Gamma')$ est également unifère, puisque Γ/Γ' est un Γ-module trivial . D'après le corollaire II.3, le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ est unifère . D'après le corollaire II.2, pour chaque racine ρ_i de G, si ρ_i est Γ-critique, alors (G, Γ, ρ_i) est unifère .

IV — Le lemme de relèvement

L'objet de ce paragraphe est d'établir un lemme de relèvement de chemins que nous utiliserons à plusieurs reprises dans la démonstration de $b) \Rightarrow a)$. C'est une version sophistiquée de [C2], *lemme 2.1.3* .

Tout d'abord nous utiliserons constamment les propriétés suivantes, qui sont des conséquences immédiates de la définition de $\langle A \rangle_B$ (voir le paragraphe I) .

Lemme IV.1 — *Soient A, B, C trois parties d'un même groupe .*
a) Si $1 \notin B$ alors $\langle A\rangle_B = \emptyset$
b) $\langle A\rangle_B \subset \langle A\rangle \cap B$
c) $\langle A^{-1}\rangle_B = \langle A\rangle_B$
d) Si $X \subset \langle A\rangle$ est fini alors il existe $Y \subset \langle A\rangle$ fini tel que $X \subset \langle A\rangle_Y$
e) $\langle A\rangle_B\langle A\rangle_C \subset \langle A\rangle_{BC}$
f) $(\langle A\rangle_B)^{-1} \subset \langle A\rangle_{B^{-1}B}$
g) $\langle\langle A\rangle_B\rangle_C \subset \langle A\rangle_{CB}$

Il nous faut généraliser la notion de *génération compacte* au cas d'une partie génératrice éventuellement infinie .

Définition IV.2 — *Soit $\mathcal{G}$ une partie (finie ou infinie) d'un groupe de Lie G . Nous dirons que $\mathcal{G}$ engendre compactement $\langle\mathcal{G}\rangle$ si pour tout $K \in \mathcal{K}\ (G)$, il existe $L \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que :*

$$\langle\mathcal{G}\rangle \cap K \subset \langle\mathcal{G}\rangle_L$$

Soit $\mathcal{G}$ une partie *finie* de G . On voit que $\langle\mathcal{G}\rangle$ est de génération compacte exactement quand il est engendré compactement par $\mathcal{G}$. Et alors, il est engendré compactement par toute autre partie génératrice finie .

Par contre, si deux parties de G dont l'une au moins est infinie engendrent le même sous-groupe, ce sous-groupe peut être engendré compactement par l'une d'elles mais pas par l'autre.

Lemme IV.3 (de relèvement) — *Soit une suite exacte courte de groupes de Lie :*

$$1 \to H \hookrightarrow G \xrightarrow{p} G/H \to 1$$

(On ne suppose pas H connexe) .

Soient Σ un sous-groupe de G, $\mathcal{S}$ une partie génératrice de Σ et Δ un sous-groupe de $\Sigma \cap H$. On fait les hypothèses suivantes :

1) $\mathcal{S}$ est relativement compacte dans G .
2) $p(\Sigma)$ est compactement engendré par $p(\ \mathcal{S}\ )$.
3) Δ est normal dans Σ et uniforme dans H .

Alors :
1) Pour tout $K \in \mathcal{K}\ (G)$, il existe $K' \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que :

$$\Sigma \cap KH \subset \Delta\langle\mathcal{S}\rangle_{K'}$$

2) Pour tout $K \in \mathcal{K}\ (G)$, il existe $K'' \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que :

$$\Sigma \cap K \subset (\Delta \cap K'')\langle\mathcal{S}\rangle_{K''}$$

3) Si l'on suppose de plus que Δ est de type fini et de génération compacte dans H, alors Σ est compactement engendré par $\mathcal{S}$.

Démontrons d'abord la première conclusion . Fixons $K \in \mathcal{K}\ (G)$. Comme $p(\Sigma)$ est compactement engendré par $p(\ \mathcal{S}\ )$ (hypothèse 2), il existe $K_1 \in \mathcal{K}\ (G/H)$ tel que $p(\Sigma) \cap p(K) \subset \langle p(\ \mathcal{S}\ )\rangle_{K_1}$.

Montrons d'abord qu'il existe une partie *finie* $\mathcal{D}$ de Δ et une partie compacte $V \in \mathcal{K}\ (G)$ telles que :

i) L'élément neutre $1 \in V$
ii) $V\ \mathcal{S}\ \cap p^{-1}(K_1) \subset V\ D$

Pour cela, choissons $K_2 \in \mathcal{K}\ (G)$ assez grand pour que $p(K_2)$ contienne K_1 . Comme par ailleurs Δ est uniforme dans H (hypothèse 3), il existe $K_3 \in \mathcal{K}\ (H)$ telle que $H = K_3\Delta$. Soit V un voisinage compact de K_2K_3, qui contienne aussi 1 .

L'ensemble $p^{-1}(K_1)$ est alors contenu dans $\overset{o}{V}\ \Delta$. En effet $p^{-1}(K_1)$ est contenu dans $K_2H = K_2K_3\Delta$, qui est bien contenu dans $\overset{o}{V}\ \Delta$.

Considérons $K_4 = V\ \mathcal{S}\ \cap p^{-1}(K_1)$. C'est une partie relativement compacte de $p^{-1}(K_1)$ (ici on emploie l'hypothèse 1) . Or $p^{-1}(K_1)$ est recouvert par les ouverts $\overset{o}{V}\ \delta$, où δ décrit Δ . Donc il existe une partie finie $\mathcal{D}$ de Δ telle que K_4 est recouvert par les $\overset{o}{V}\delta$, où δ décrit $\mathcal{D}$. Les propriétés i) et ii) sont bien vérifiées .

Nous allons prouver que $\Sigma \cap KH \subset \Delta\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1}\rangle_{K_5}$, où $K_5 = V \cup V\mathcal{D}^{-1}$.

Soit ξ un élément quelconque de $\Sigma \cap KH$. Donc $p(\xi)$ appartient à $p(\Sigma) \cap p(K)$, donc aussi à $\langle p(\mathcal{S})\rangle_{K_1}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme un mot : $p(\xi) = p(\sigma_1)p(\sigma_2)...p(\sigma_n)$ où $\sigma_i \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}$ et dont la trace $\{ p(\sigma_1...\sigma_m) \ / \ 0 \leq m \leq n \}$ est contenue dans K_1 .

Déduisons-en qu'il existe n éléments $\delta_1, ..., \delta_n$ de $\mathcal{D}$ tels que chaque produit $\xi_m = \sigma_1\delta_1^{-1}\sigma_2\delta_2^{-1}...\sigma_m\delta_m^{-1}$ appartienne à V .

Définissons δ_m par récurrence sur m . Le "produit" $\xi_0 = 1$ appartient bien à V (point i) . En supposant que $\delta_1, ..., \delta_{m-1}$ sont définis et que ξ_{m-1} appartient à V, on a $p(\xi_{m-1}\sigma_m) = p(\sigma_1...\sigma_m)$ qui appartient à K_1 . Donc $\xi_{m-1}\sigma_m$ appartient à $V\mathcal{S} \cap p^{-1}(K_1)$. Donc (point ii) il existe un $\delta_m \in \mathcal{D}$ tel que $\xi_{m-1}\sigma_m$ appartient à $V\delta_m$. Le produit $\xi_m = \xi_{m-1}\sigma_m\delta_m^{-1}$ appartient bien à V : la récurrence est assurée .

Considérons le mot $\sigma_1\delta_1^{-1}\sigma_2\delta_2^{-1}...\sigma_n\delta_n^{-1}$ en les éléments de $\mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1}$: chacun des éléments de sa trace appartient à V ou à $V\mathcal{D}^{-1}$. Donc le produit ξ_n appartient à $\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1}\rangle_{K_5}$.

Comme $\delta_1, ..., \delta_n$ appartiennent à Δ qui est normal dans Σ (hypothèse 3), les éléments ξ et ξ_n sont congrus modulo Δ . Nous avons bien montré que $\xi \in \Delta\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1}\rangle_{K_5}$.

Enfin, comme $\mathcal{D}^{-1}$ est fini et contenu dans Σ, il existe un ensemble fini $K_6 \subset \Sigma$ tel que :

$$\mathcal{D}^{-1} \subset \langle \mathcal{S} \rangle_{K_6}$$

(lemme IV.1, propriété d) . Donc, si l'on choisit un $K_7 \in \mathcal{K}(G)$ qui contient $\mathcal{S}$ (hypothèse 1), on a :

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1} \subset \langle \mathcal{S}\rangle_{K_6 \cup K_7}$$

Donc $\langle \mathcal{S} \cup \mathcal{D}^{-1}\rangle_{K_5}$ est contenu dans $\langle\langle \mathcal{S}\rangle_{K_6\cup K_7}\rangle_{K_5}$ qui est lui-même contenu (lemme IV.1, propriété g) dans $\langle \mathcal{S}\rangle_{K_5(K_6\cup K_7)}$. Posons $K' = K_5(K_6 \cup K_7)$: on a bien :

$$\Sigma \cap KH \subset \Delta\langle \mathcal{S}\rangle_{K'}$$

Quant à la deuxième conclusion, fixons $K \in \mathcal{K}(G)$. La première conclusion nous fournit un $K' \in \mathcal{K}(G)$ tel que tout élément ξ de $\langle \mathcal{S}\rangle \cap K$ s'écrit $\xi = \delta\xi'$ avec $\delta \in \Delta$ et $\xi' \in \langle \mathcal{S}\rangle_{K'}$. En particulier $\delta = \xi\xi'^{-1}$ appartient à KK'^{-1}, donc ξ appartient à $(\Delta \cap K'')\langle \mathcal{S}\rangle_{K''}$, où $K'' = (KK'^{-1}) \cup K'$.

Passons à la démonstration de la troisième conclusion . Fixons $L \in \mathcal{K}(G)$. D'après la deuxième conclusion, il existe $L' \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\Sigma \cap L \subset (\Delta \cap L')\langle \mathcal{S}\rangle_{L'}$. Soit $\mathcal{D}'$ une partie génératrice finie de Δ . Puisque Δ est de génération compacte dans H, il existe $L'' \in \mathcal{K}(H)$ tel que $\Delta \cap L' \subset \langle \mathcal{D}'\rangle_{L''}$. Comme $\mathcal{D}'$ est fini et contenu dans Σ, il existe un ensemble fini $L''' \subset \Sigma$ tel que $\mathcal{D}' \subset \langle \mathcal{S}\rangle_{L'''}$ (lemme IV.1, propriété d) . Donc $\langle \mathcal{D}'\rangle_{L''} \subset \langle\langle \mathcal{S}\rangle_{L'''}\rangle_{L''}$, qui est lui-même contenu (lemme IV.1, propriété g) dans $\langle \mathcal{S}\rangle_{L''L'''}$. Au total $\Sigma \cap L$ est contenu dans $\langle \mathcal{S}\rangle_{L''L'''}\langle \mathcal{S}\rangle_{L'}$, qui est lui-même contenu dans $\langle \mathcal{S}\rangle_{L''L'''L'}$ (lemme IV.1, propriété e) . Nous avons montré que Σ est compactement engendré par $\mathcal{S}$, ce qui termine la démonstration du lemme de relèvement .

Voici deux premiers corollaires du lemme de relèvement .

Proposition IV.4 — *Soient N un groupe de Lie nilpotent, $\mathcal{G}$ une partie de N relativement compacte, et Γ le sous-groupe de N engendré par $\mathcal{G}$. Alors Γ est compactement engendré par $\mathcal{G}$.*

La démonstration se fait bien sûr par récurrence sur la dimension de N . Le cas de la dimension 0 est trivial ! Supposons donc la propriété vraie dans tous les groupes de Lie nilpotents de dimension inférieure . Alors :

Si Γ n'est pas uniforme dans N, alors Γ est contenu dans un sous-groupe fermé connexe strict de N (voir par exemple [R]), auquel s'applique l'hypothèse de récurrence .

Nous pouvons donc supposer que Γ est uniforme dans N . Soit alors H le dernier élément non égal à 1 de la suite centrale descendante de N : l'intersection $\Gamma \cap H$ est uniforme dans H (proposition V.2), donc contient un sous-groupe Δ discret et uniforme dans H . Appliquons le lemme de relèvement avec $\Sigma = \Gamma$ et $\mathcal{S} = \mathcal{G}$. Les hypothèses 1) et 3) sont évidemment satisfaites; l'hypothèse 2) du lemme résulte de notre hypothèse de récurrence . De plus Δ étant un sous-groupe discret cocompact de H, est de type fini et de génération compacte dans H . Donc (troisième conclusion) Γ est compactement engendré par $\mathcal{G}$: la récurrence est assurée .

Proposition IV.5 — *Soit $p : G_1 \to G_2$ un revêtement de groupes de Lie . Un sous-groupe de type fini uniforme dans G_2 est de génération compacte si et seulement si son image inverse par p est de génération compacte dans G_1 .*

Le sens "si" est trivial . Pour démontrer le sens "seulement si" on applique le lemme de relèvement à la suite

$$1 \to \ker(p) \hookrightarrow G_1 \to G_2 \to 1$$

avec pour Σ l'image inverse de notre sous-groupe dans G_1, pour $\mathcal{S}$ une partie génératrice finie quelconque de Σ, et pour Δ le groupe $\ker(p)$ lui-même .

Exemple IV.6 — Par contre il peut arriver qu'un sous-groupe de type fini uniforme dans G_1 ne soit pas de génération compacte mais que son image dans G_2 le soit .

Soit par exemple G_1 le produit semi-direct $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$, où l'action se fait par rotations (revêtement universel du groupe des déplacements plans) :

$$(t_1, z_1)(t_2, z_2) = (t_1 + t_2, z_1 + e^{2\pi i t_1} z_2)$$

Soit $G_2 = G_1/(\mathbf{Z} \times 0)$ (groupe des déplacements plans) . Le sous-groupe $\langle(0,1),(0,i),(t,0)\rangle$ n'est pas de génération compacte dans G_1 si l'on a pris soin que $e^{2\pi i t}$ ne soit pas une unité algébrique (théorème A et corollaire II.6) . Mais son image dans G_2 est de génération compacte dans G_2 car elle contient l'image de $\langle(0,1),(0,i)\rangle$ qui est polycyclique et uniforme dans G_2 (corollaire VI.3) .

V — Démonstration de l'implication b) $\Rightarrow$ a) du théorème A

Fixons G et Γ comme dans les hypothèses du théorème A ; supposons que pour chaque racine Γ-critique ρ_i de G, le triplet (G, Γ, ρ_i) est unifère, et prouvons que Γ est de génération compacte .

En première lecture, on peut aborder cette démonstration en faisant l'hypothèse que Γ est dense dans G : avec cette hypothèse, le sous-groupe S introduit ci-dessous n'est autre que G; le résultat du lemme V.3 est une trivialité; le premier pas de la démonstration devient un cas particulier très simple de la proposition IV.4 (un sous-groupe de type fini d'un groupe de Lie abélien est toujours de génération compacte); le deuxième pas devient une simple application du corollaire II.2 et n'emploie plus le lemme II.9; le résultat du quatrième pas ne fait que répéter celui du troisième .

Préliminaires — 1. Le principe de cette démonstration est d'appliquer le lemme de relèvement à une suite exacte courte du type :

$$1 \to N \hookrightarrow G \to G/N \to 1$$

où N est un sous-groupe de G fermé, connexe, normal, nilpotent, et où G/N est abélien . Mais pour appliquer ce lemme, il est crucial que $\Gamma \cap N$ soit uniforme dans N . Or il n'y a pas toujours de sous-groupe N réunissant ces propriétés, voici un exemple où il n'y en a pas .

Exemple V.1 — G est le produit semi-direct $(\mathbf{R} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{R} \times \mathbf{R})$, avec la loi :

$$(x_1, z_1, s_1, t_1)(x_2, z_2, s_2, t_2) = (x_1 + e^{s_1} x_2, z_1 + e^{2\pi i t_1} z_2, s_1 + s_2, t_1 + t_2)$$

Il est immédiat que $G' = \mathbf{R} \times \mathbf{C} \times 0 \times 0$ et que c'est le seul sous-groupe de G fermé, connexe, nilpotent, et contenant G' . On remarque par ailleurs que $0 \times \mathbf{C} \times \mathbf{R} \times 0$ est un sous-groupe de G isomorphe à $\mathbf{R}^3$. On choisit dans ce sous-groupe un réseau A générique : $A \cap (0 \times \mathbf{C} \times 0 \times 0) = \{0\}$. Soit Γ le sous-groupe de G engendré par $\mathbf{Z} \times A \times \mathbf{Z}$: il est de type fini, uniforme dans G (sa fermeture est le sous-groupe $\mathbf{R} \times A \times \mathbf{Z}$) et son intersection avec G' n'est pas uniforme dans G' .

Au contraire dans les groupes *nilpotents* on a la :

Proposition V.2 (Malcev) — *Si Σ est un sous-groupe uniforme d'un groupe de Lie nilpotent N, alors pour tout $k \geq 0$, $\Sigma^{(k)}$ est uniforme dans $N^{(k)}$.*

(Pour les notations, voir le paragraphe I) . Voir [R], théorème 2.3, corollaire 1 .

Pour contourner cette difficulté, nous considérerons la composante connexe neutre de la fermeture de $\Gamma G'$, que nous noterons S . C'est un sous-groupe de G normal, contenant G', fermé, connexe . Il est clair que ΓS est fermé dans G et que $\Gamma \cap S$ est uniforme dans S .

Lemme V.3 — *$\Gamma \cap S'$ est uniforme dans S' .*

C'est un corollaire du résultat de Mostow suivant . Soit R un groupe de Lie résoluble . Un élément γ de R est *régulier* dans R quand pour chaque racine ρ de R, si $\rho(\gamma) = 1$, alors $\rho(R) = \{1\}$. On note $R^{(\infty)} = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} R^{(k)}$ l'intersection de tous les termes de la suite centrale descendante de R .

Proposition V.4 (Mostow : [Mo], paragraphe 5, lemme 5) — *Soit $\Sigma \subset R$ un sous-groupe uniforme . Si Σ contient un élément régulier de R alors $\Sigma \cap R^{(\infty)}$ est uniforme dans $R^{(\infty)}$.*

Déduisons-en le lemme V.3 .

Comme G' est un sous-groupe de S à la fois fermé, connexe, nilpotent et normal, il est contenu dans le noyau de toutes les racines de S . Or $(\Gamma \cap S)G'$ est dense dans S . Il est donc évident que $\Gamma \cap S$ contient des éléments réguliers de S . Nous pouvons donc appliquer le résultat de Mostow à $\Gamma \cap S$ comme sous-groupe de S, et en déduire que $\Gamma \cap S^{(\infty)}$ est uniforme dans $S^{(\infty)}$.

Considérons la projection $p : S \rightarrow N = S/S^{(\infty)}$. La suite centrale descendante de S est stationnaire, si bien que N est nilpotent . L'image $p(\Gamma \cap S)$ est uniforme dans N . Donc $p(\Gamma \cap S) \cap N'$ est uniforme dans $N' = p(S')$ (proposition V.2) . Comme de plus $\Gamma \cap \ker(p)$ est uniforme dans $\ker(p)$, il est clair que $\Gamma \cap S'$ est uniforme dans S' .

2. Par ailleurs, choisissons une partie génératrice finie $\mathcal{G}$ de Γ . Notons que comme Γ est de type fini et comme $\Gamma \cap G'$ et $\Gamma \cap S$ contiennent Γ', les groupes $\Gamma \cap G'$ et $\Gamma \cap S$ sont de type fini comme Γ-groupes, c'est-à-dire qu'il existe une partie finie $\mathcal{X}$ de $\Gamma \cap G'$ et une partie finie $\mathcal{Y}$ de $\Gamma \cap S$ telles que:

$$\Gamma \cap G' = \langle\, \mathcal{X}^{\,\Gamma} \rangle \text{ et } \Gamma \cap S = \langle\, \mathcal{Y}^{\,\Gamma} \rangle$$

Premier pas — $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ est de génération compacte dans G/S' .

Considérons les inclusions entre sous-groupes normaux de Γ : $(\Gamma \cap G')' \subset \Gamma \cap S' \subset \Gamma \cap S \subset \Gamma$ et $(\Gamma \cap G')' \subset \Gamma \cap G' \subset \Gamma$ .. Le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ est unifère (corollaire II.2) . Le triplet $(G, \Gamma, \Gamma/(\Gamma \cap G'))$ est également unifère, puisque $\Gamma/(\Gamma \cap G')$ est un Γ-module trivial . Donc (corollaire II.3) le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S'))$ est unifère . Il existe donc (lemme II.4) un $K \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telle que :

D'une part c a même action que γ sur $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$. Donc $\mathcal{Y}^{\,\gamma} \subset \langle\, \mathcal{Y}^{\,\mathrm{spt}(c)} \rangle (\Gamma \cap S')$.

D'autre part c est à support dans $G'K$. Or G' est contenu dans S, et $\Gamma/(\Gamma \cap S)$ est discret, donc il existe une partie finie F de $\Gamma \cap S$ telle que $\Gamma \cap G'K \subset F(\Gamma \cap S)$ et finalement c est à support dans $F(\Gamma \cap S)$.

Au total $\mathcal{Y}^{\,\Gamma}$ est contenu dans $\langle\, \mathcal{Y}^{\,F(\Gamma \cap S)} \rangle (\Gamma \cap S')$, qui est évidemment contenu dans $\langle\, \mathcal{Y}^{\,F} \rangle (\Gamma \cap S')$.

De tout ce qui précède, il résulte que $\Gamma \cap S = \langle\, \mathcal{Y}^{\,F} \rangle (\Gamma \cap S')$: le groupe $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ est de type fini .

Appliquons le lemme de relèvement (IV.3) à la suite :

$$1 \rightarrow S/S' \hookrightarrow G/S' \rightarrow G/S \rightarrow 1$$

en prenant $\Gamma/(\Gamma\cap S')$ pour groupe Σ, l'image de $\mathcal{G}$ dans G/S' pour partie génératrice $\mathcal{S}$, et $(\Gamma\cap S)/(\Gamma\cap S')$ pour groupe Δ .

Les hypothèses du lemme sont vérifiées : $\mathcal{S}$ est fini donc relativement compact, G/S est abélien donc l'image de Γ y est de génération compacte, et nous avons déjà mentionné que $\Gamma \cap S$ est uniforme dans S . De plus nous venons de montrer que $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ est de type fini, et S/S' est abélien donc $(\Gamma \cap S)/(\Gamma \cap S')$ y est de génération compacte.

D'après la troisième conclusion du lemme, $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ est de génération compacte dans G/S' .

Deuxième pas — $(S, \Gamma \cap S, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ est unifère .

Dans le cas où $S = G$, il s'agit simplement de la reformulation de la propriété b) que donne le corollaire II.2 . Dans le cas général, on applique le lemme II.9, pour conclure que pour chaque racine Γ-critique ρ_i de G, le triplet $(S, \Gamma \cap S, \rho_i|_S)$ est unifère . Le résultat annoncé s'obtient alors en copiant la démonstration du corollaire II.2 .

Troisième pas — Il existe $K_1 \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que $\mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S'K_1}\rangle(\Gamma \cap G')'$.

D'après le résultat du pas précédent et le lemme II.4, il existe un $K_1 \in \mathcal{K}\ (S)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma \cap S$, il existe une chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma \cap S]$ telle que :

D'une part c a même action que γ sur $(\Gamma\cap G')/(\Gamma\cap G')'$. Donc $\mathcal{X}^{\,\gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,\mathrm{spt}(c)}\rangle(\Gamma\cap G')'$. D'autre part c est à support dans $S'K_1$. Au total $\mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S}$ est contenu dans $\langle\, \mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S'K_1}\rangle(\Gamma \cap G')'$.

Quatrième pas — Il existe $K_2 \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que $\mathcal{X}^{\,\Gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S'K_2}\rangle(\Gamma \cap G')'$.

Exploitons de nouveau la propriété b) . Le triplet $(G, \Gamma, (\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')')$ est unifère (corollaire II.2) . Il existe donc (lemme II.4) un $K \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe une chaîne $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telle que :

D'une part c a même action que γ sur $(\Gamma \cap G')/(\Gamma \cap G')'$. Donc $\mathcal{X}^{\,\gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,\mathrm{spt}(c)}\rangle(\Gamma \cap G')'$.

D'autre part c est à support dans KG' . Or G' est contenu dans S, et $\Gamma \cap S$ est uniforme dans S : donc il existe $K' \in\ \mathcal{K}\ (S)$ tel que $S = K'(\Gamma \cap S)$. Finalement c est à support dans $(\Gamma \cap KK')(\Gamma \cap S)$.

Au total :

$$\mathcal{X}^{\,\Gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,(\Gamma\cap KK')(\Gamma\cap S)}\rangle(\Gamma \cap G')'$$

qui s'écrit aussi $\langle(\, \mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S})^{\Gamma\cap KK'}\rangle(\Gamma \cap G')'$. Donc :

$$\mathcal{X}^{\,\Gamma} \subset \langle(\, \mathcal{X}^{\,(\Gamma\cap S'K_1)})^{(\Gamma\cap KK')}\rangle(\Gamma \cap G')'$$

Or $(\, \mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S'K_1})^{(\Gamma\cap KK')}$ s'écrit aussi $\mathcal{X}^{\,(\Gamma\cap KK')(\Gamma\cap S'K_1)}$, et $(\Gamma \cap KK')(\Gamma \cap S'K_1)$ est clairement contenu dans $\Gamma \cap S'KK'K_1$. Au total :

$$\mathcal{X}^{\,\Gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,\Gamma\cap S'KK'K_1}\rangle(\Gamma \cap G')'$$

Il suffit donc de prendre $K_2 = KK'K_1$.

Cinquième pas — Il existe $K_3 \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que $\Gamma \cap G'$ est engendré par son intersection avec $\langle\mathcal{G}\rangle_{K_3}$.

Appliquons le lemme de relèvement à la suite :

$$1 \to S' \hookrightarrow G \to G/S' \to 1$$

en prenant Γ pour groupe Σ, $\mathcal{G}$ pour partie génératrice $\mathcal{S}$ et $\Gamma \cap S'$ pour groupe Δ . Les hypothèses 1, 2 et 3 du lemme sont bien réunies puisque $\Gamma/(\Gamma \cap S')$ est de génération compacte dans G/S' (premier pas) et puisque $\Gamma \cap S'$ est uniforme dans S' (lemme V.3) . D'après la première conclusion du lemme, il existe $K'' \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que :

$$\Gamma \cap S'K_2 \subset (\Gamma \cap S')\langle\mathcal{G}\rangle_{K''}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{X}^{\,\Gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,(\Gamma\cap S')\langle\mathcal{G}\rangle_{K''}}\rangle(\Gamma \cap G')'$$

De la formule élémentaire $\xi^{\gamma\kappa} = [\gamma, \xi^{\kappa}]\xi^{\kappa}$, il résulte que pour $\xi \in \Gamma\cap G'$, $\gamma \in \Gamma\cap G'$ et $\kappa \in \Gamma$, les éléments $\xi^{\gamma\kappa}$ et ξ^{κ} sont congrus modulo $(\Gamma \cap G')'$. Conclusion :

$$\mathcal{X}^{\,\Gamma} \subset \langle\, \mathcal{X}^{\,\langle\mathcal{G}\rangle_{K''}}\rangle(\Gamma \cap G')'$$

Or il existe $K_3 \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que $\mathcal{X}^{\langle \mathcal{G} \rangle_{K''}} \subset \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3}$ (lemme IV.1, propriétés d,e et f) :

$$\mathcal{X}^{\Gamma} \subset \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle (\Gamma \cap G')'$$

Donc :

$$\Gamma \cap G' = \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle (\Gamma \cap G')'$$

Or dans les groupes abstraits nilpotents on a le lemme élémentaire suivant :

Lemme V.5 — *Soient N un groupe nilpotent et Σ un sous-groupe . Si $\Sigma N' = N$, alors $\Sigma = N$.*
Voir par exemple [Hal], *corollary 10.3.3* .

Donc $\Gamma \cap G' = \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle$.

Conclusion — Appliquons une ultime fois le lemme de relèvement à la suite :

$$1 \to S' \hookrightarrow G \to G/S' \to 1$$

en prenant encore Γ pour groupe Σ, $\mathcal{G}$ pour partie génératrice $\mathcal{S}$ et $\Gamma \cap S'$ pour groupe Δ . Mais exploitons cette fois la deuxième conclusion du lemme : pour tout $L \in \mathcal{K}\ (G)$ il existe $L' \in \mathcal{K}\ (G)$ tel que :

$$\Gamma \cap L \subset (\Gamma \cap S' \cap L') \langle \mathcal{G} \rangle_{L'}$$

Comme G' est nilpotent, $\Gamma \cap G'$ est *compactement* engendré par $\Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3}$ (proposition IV.4) . Donc il existe $L'' \in\ K\ (G')$ tel que $\Gamma \cap S' \cap L' \subset \langle \Gamma \cap G' \cap \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle_{L''}$. Au total $\Gamma \cap L \subset \langle \langle \mathcal{G} \rangle_{K_3} \rangle_{L''} \langle \mathcal{G} \rangle_{L'}$ qui est contenu dans $\langle \mathcal{G} \rangle_{L'' K_3 L'}$ (lemme IV.1, propriétés e et g) . Ainsi pour tout $L \in \mathcal{K}\ (G)$, $\Gamma \cap L$ est contenu dans $\langle \mathcal{G} \rangle_{L'' K_3 L'}$: nous avons bien montré que Γ est de génération compacte .

VI — Quelques corollaires du théorème A

Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe de type fini uniforme .

Corollaire VI.1 — *Si G est nilpotent, alors Γ est de génération compacte .*

Commentaire . — Plus simplement le corollaire VI.1 est un cas particulier de la proposition IV.4 .

Notre deuxième corollaire repose sur un critère qui ne semble pas figurer dans la littérature malgré sa simplicité et son utilité . Rappelons qu'une *unité algébrique* est un nombre complexe non nul qui est un entier algébrique sur $\mathbf{Z}$, et dont l'inverse est aussi un entier algébrique sur $\mathbf{Z}$.

Proposition VI.2 — *Γ est polycyclique si et seulement si toutes les racines de tous ses éléments sont des unités algébriques .*

Démonstration — Une *suite de composition* de G est une suite de sous-groupes fermés connexes normaux S_i tels que :

$$\{1\} = S_n \subset S_{n-1} \subset \ldots \subset S_0 = G$$

Et que S_i/S_{i+1} soit abélien .

Il existe une suite de composition (S_i) telle que $\Gamma \cap S_i$ est uniforme dans S_i, pour chaque i . En effet, il suffit de prendre pour S_1 la composante neutre de la fermeture de $\Gamma G'$ (voir paragraphe V, préliminaire 1), et pour tout $i \geq 2$, $S_i = ({S_1}')^{(i-2)}$ (voir le paragraphe I pour cette notation) . Le lemme V.3 et la proposition V.2 assurent que $\Gamma \cap S_i$ est uniforme dans S_i pour chaque i .

Si Γ est polycyclique, alors $\Gamma \cap S_i$ est de type fini . Après projection dans S_i/S_{i+1}, puis relèvement par l'application exponentielle de s_i/s_{i+1} (algèbres de Lie de S_i et S_{i+1}) sur S_i/S_{i+1}, on obtient dans s_i/s_{i+1} un sous-groupe additif A_i uniforme, de type fini, et Γ-invariant . Le produit tensoriel $R \otimes_{\mathbf{Z}} A_i$ est un espace vectoriel réel de dimension finie qui contient A_i comme réseau et se surjecte sur s_i/s_{i+1} . Fixons un élément $\gamma \in \Gamma$. L'adjoint de γ, vu comme un automorphisme linéaire de s_i/s_{i+1}, préserve A_i donc se relève en un automorphisme linéaire de $R \otimes_{\mathbf{Z}} A_i$. Comme cet automorphisme préserve le réseau A_i, son polynôme caractéristique P_i est à coefficients entiers .

Formons le produit $P = P_0 \dots P_n$: $P_i(\mathrm{Ad}(\gamma))$ annule s_i/s_{i+1} (théorème de Cayley-Hamilton) donc $P(\mathrm{Ad}(\gamma))$ annule g . Or P est un polynôme unitaire à coefficients entiers . Donc les valeurs propres de $\mathrm{Ad}(\gamma)$ sont des entiers algébriques .

Le même raisonnement s'applique aux racines de γ^{-1} qui sont les inverses des racines de γ, ce sont donc des *unités* algébriques .

Inversement, supposons que les racines des éléments de Γ sont des unités algébriques . Les racines fournissent un homomorphisme d'anneaux $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d) : \mathbf{Z}[\Gamma] \to \mathbf{C}^n$, dont l'image est précisément le sous-anneau de $\mathbf{C}^n$ engendré par les racines des éléments de Γ . C'est donc un $\mathbf{Z}$-module de type fini . En d'autres termes, si l'on note N le sous-groupe de G formé des éléments unipotents, l'anneau $\mathbf{Z}[\Gamma/(\Gamma \cap N)]$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini .

Par ailleurs, Γ/Γ' est un $\mathbf{Z}$-module de type fini, donc son sous-module $(\Gamma \cap N)/\Gamma'$ est également de type fini . Or Γ'/Γ'' étant un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module de type fini, son quotient $\Gamma'/(\Gamma \cap N)'$ est également un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module de type fini . Au total $(\Gamma \cap N)/(\Gamma \cap N)'$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module de type fini . En d'autres termes $(\Gamma \cap N)/(\Gamma \cap N)'$ est un $\mathbf{Z}[\Gamma/(\Gamma \cap N)]$ -module de type fini .

En réunissant nos résultats, on voit que $(\Gamma \cap N)/(\Gamma \cap N)'$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini . Ainsi $\Gamma \cap N$ est un groupe nilpotent dont l'abélianisé est de type fini . Ceci implique qu'il est lui-même de type fini (lemme V.5) c'est-à-dire polycyclique . Donc Γ, en tant qu'extension de $\Gamma \cap N$ par un groupe abélien de type fini, est lui aussi polycyclique .

Corollaire VI.3 — *Si Γ contient un sous-groupe Σ polycyclique uniforme dans G, alors Γ est de génération compacte .*

C'est un corollaire évident de la proposition VI.2 (appliquée à Σ), du corollaire II.6 (appliqué à Σ), et du théorème A (appliqué à Γ) .

Corollaire VI.4 — *On suppose que G n'est pas nilpotent . Alors pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ est de génération compacte est un ensemble rare (au sens de Zariski ou de Baire suivant que G est ou n'est pas algébrique) mais dense dans G^n .*

Démontrons d'abord que cet ensemble est dense . Il est facile de construire dans G des ouverts connexes en nombre fini $U_1, \dots, U_N$ tels que l'élément neutre 1 de G appartienne à la fermeture de chaque U_i et que pour chaque $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ non nul, l'un au moins des U_i soit contenu dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$.

Tout sous-groupe d'un groupe de Lie, s'il est connexe par arcs, est un sous-groupe de Lie (Yamabe, [Y]) . On en déduit aisément que pour toute partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^p$, le sous-groupe qu'elle engendre est fermé .

Appliquons ceci à l'image de U_i dans $End_{\mathbf{R}}(g)$ par la représentation adjointe : le sous-groupe additif $\langle \mathrm{Ad}(U_i) \rangle$ de $End_{\mathbf{R}}(g)$ engendré par $\mathrm{Ad}(U_i)$ est fermé . Mais l'endomorphisme id appartient à la fermeture de $\mathrm{Ad}(U_i)$. Donc $id \in \langle \mathrm{Ad}(U_i) \rangle$, c'est-à-dire qu'il existe une chaîne $c_i \in \mathbf{Z}[G]$, à support dans U_i, telle que $\mathrm{Ad}(c_i) = id$. Soit $\mathcal{G}$ la réunion des supports des c_i, à laquelle on ajoute éventuellement des éléments en nombre fini pour que $\langle \mathcal{G} \rangle$ soit uniforme . Il découle alors évidemment du théorème A que tout sous-groupe de G de type fini qui contient $\mathcal{G}$ est de génération compacte .

Comme $\mathcal{G}$ est une partie finie de G, on voit aisément que pour n assez grand, l'ensemble des $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ contient $\mathcal{G}$ est dense dans G^n .

Passons à la rareté . Fixons un entier n quelconque . Du fait que G n'est pas nilpotent, pour chaque sous-groupe Γ uniforme, il y a au moins une racine ρ de G telle que ρ est Γ-critique et $\rho(G) \neq \{1\}$ (exercice) . Il suffit donc de prouver que pour chaque racine $\rho \neq 1$ fixée, l'ensemble des $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$ tels que ρ est $\langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle$-critique et $\langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle$ est de génération compacte, est un ensemble rare . D'après le théorème A, il suffit de prouver que :

Pour presque tout $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$, *et pour tout* $c \in \mathbf{Z}[\langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle]$, *si* $\rho(c) = 1$ *alors* $\mathrm{spt}(c) \cap G' \neq \emptyset$.

Soit Λ le groupe libre à n générateurs . Pour chaque $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$, condidérons l'homomorphisme de Λ dans G qui envoie le i-ème générateur de Λ sur γ_i . Il s'étend en un homomorphisme d'anneaux surjectif :

$$\mathbf{Z}[\Lambda] \to \mathbf{Z}[G] : c \mapsto c(\gamma_1, ..., \gamma_n)$$

Comme $\mathbf{Z}[\Lambda]$ est dénombrable, il suffit de montrer que pour $c \in \mathbf{Z}[\Lambda]$ fixé on a :

Pour presque tout $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$, *si* $\rho(c(\gamma_1, ..., \gamma_n)) = 1$ *alors* $\mathrm{spt}(c(\gamma_1, ..., \gamma_n)) \cap G' \neq \emptyset$.

Considérons l'image $\bar{c}$ de c dans $\mathbf{Z}[\Lambda/\Lambda']$ (anneau des polynômes de Laurent à n variables) . On a $\rho(c(\gamma_1, ..., \gamma_n)) = \bar{c}(\rho(\gamma_1), ..., \rho(\gamma_n))$. La fonction $G^n \to \mathbf{C} : (\gamma_1, ..., \gamma_n) \mapsto \bar{c}(\rho(\gamma_1), ..., \rho(\gamma_n))$ est analytique réelle (et même polynomiale quand G est algébrique) comme composée de l'application analytique (respectivement polynomiale) $\rho \times ... \times \rho : G^n \to \mathbf{C}^n$, et de l'application polynomiale $\bar{c} : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$. Donc l'image inverse d'un point par cette fonction est ou rare, ou tout . On est donc dans l'un des deux cas suivants :

Premier cas : pour presque tout $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$, on a $\bar{c}(\rho(\gamma_1), ..., \rho(\gamma_n)) \neq 1$. Il n'y a rien à démontrer .

Second cas : pour *tout* $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$, on a $\bar{c}(\rho(\gamma_1), ..., \rho(\gamma_n)) = 1$. En d'autres termes dans $\mathbf{C}^n$, l'hypersurface algébrique définie par $\bar{c} = 1$ contient le produit cartésien $(\rho(G))^n$. Or $\rho(G)$ est un ensemble infini . Donc $\bar{c} = 1$. Donc l'image de $c(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ dans $\mathbf{Z}[G/G']$ est aussi égale à 1 . Il en résulte que $\mathrm{spt}(c(\gamma_1, ..., \gamma_n)) \cap G' \neq \emptyset$.

Le corollaire VI.4 est-il spécifique aux groupes de Lie résolubles ? On peut montrer que dans un groupe de Lie non compact quelconque, un sous-groupe libre non abélien n'est jamais de génération compacte . Il en résulte, si le groupe n'est pas résoluble, que dans l'ouvert des $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tels que $\langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle$ est uniforme, l'ensemble des $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in G^n$ tels que $\langle\gamma_1, ..., \gamma_n\rangle$ est de génération compacte est encore un ensemble rare . Mais nous ne savons pas s'il est dense ou non .

Exemple VI.5 — Les corollaires VI.1 et VI.4 indiquent en particulier que chaque groupe de Lie résoluble contient un sous-groupe de type fini uniforme et de génération compacte . Ceci est remarquable parce qu'il existe des groupes de Lie résolubles qui ne sont quotient d'aucun groupe de Lie contenant un sous-groupe discret cocompact :

Choisissons un réel $\alpha > 0$ qui ne puisse pas être écrit comme quotient des logarithmes de deux unités algébriques réelles (c'est le cas générique) . Soit G le produit semi-direct $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$, avec la loi :

$$(t_1, x_1, y_1)(t_2, x_2, y_2) = (t_1 + t_2, x_1 + e^{\alpha t_1} x_2, y_1 + e^{t_1} y_2)$$

Supposons par l'absurde que G soit l'image d'un groupe de Lie H contenant un sous-groupe discret cocompact Γ par un homomorphisme $p : H \to G$. On peut supposer H simplement connexe : il est produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble R par un groupe de Lie semi-simple S . On a $p(S) = \{1\}$, donc $p(R) = G$. D'après un théorème d'Auslander (voir [R], *theorem 8.24*) il existe un groupe de Lie résoluble R_1 compris entre R et H tel que $\Gamma \cap R_1$ est un sous-groupe discret cocompact dans R_1 . Or un sous-groupe discret cocompact dans un groupe de Lie résoluble est toujours polycyclique (Mostow, voir [R], *proposition 3.7*) . Donc $p(\Gamma \cap R_1)$ serait un sous-groupe polycyclique uniforme dans G . L'existence d'un tel sous-groupe de G est exclue par la proposition VI.2 puisque les racines d'un élément quelconque (t, x, y) sont 1, $e^{\alpha t}$ et e^t, donc ne sont toutes trois des unités algébriques que si $t = 0$.

Rappelons que pour le corollaire suivant, nous munissons Γ de la topologie discrète et $\mathrm{hom}(\Gamma, G)$ de la topologie usuelle (celle de la convergence simple) . L'inclusion *id* de Γ dans G est un point de cet espace .

Corollaire VI.6 — *Si* Γ *est de génération compacte dans* G, *alors pour tout* $\phi \in \mathrm{hom}(\Gamma, G)$ *assez proche de id, le groupe* $\phi(\Gamma)$ *est de génération compacte dans* G .

Ce n'est pas au sens strict un corollaire du théorème A, mais de la variante suivante :

Théorème A' — *Soient G un groupe de Lie résoluble et Γ un sous-groupe uniforme de type fini . Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) Γ est de génération compacte .
b') $(G, \Gamma, \Gamma'/\Gamma'')$ est unifère .

Nous avons déjà démontré cette variante, puisque notre démonstration de $a) \Rightarrow b)$ était une démonstration de $a) \Rightarrow b')$ suivie d'une démonstration de $b') \Rightarrow b)$.

Démonstration du corollaire VI.6 — D'après le théorème A', si Γ est de génération compacte dans G, alors pour tout $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ non nul, il existe $c \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telle que c est à support dans $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ et opère identiquement sur Γ'/Γ'' . Pour c fixé, l'ensemble des χ tels que $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ contient le support de c est évidemment un cône ouvert dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $\hom(G, \mathbf{R})$. Comme $\hom(G, \mathbf{R}) - 0$ quotienté par $\mathbf{R}_+^*$ est compact, il existe en fait des chaînes en nombre fini $c_i \in \mathbf{Z}[\Gamma]$ telles que :

i) Chaque c_i opère identiquement sur Γ'/Γ'' .

ii) Pour tout $\chi \in \hom(G, \mathbf{R})$ non nul, $\chi^{-1}(]0, +\infty[)$ contient le support de l'une au moins des c_i .

Pour tout $\phi \in Hom(\Gamma, G)$, $\phi(c_i)$ opère identiquement sur $(\phi(\Gamma))'/(\phi(\Gamma))''$ puisque c'est un quotient de Γ'/Γ'' . Si de plus ϕ est assez proche de id, les chaînes $\phi(c_i)$ vérifient encore la propriété ii) .

Il résulte alors du théorème A' que $\phi(\Gamma)$ est de génération compacte .

Le corollaire VI.6 est très probablement une propriété générale (non évidente) de la génération compacte : il serait encore vrai si l'on ne supposait plus G résoluble .

Enfin, voici quelques remarques sur le cas où G est *métabélien* — c'est-à-dire où G' est abélien . Dans ce cas on a la variante suivante du théorème A :

Théorème A" — *Soient G un groupe de Lie métabélien et Γ un sous-groupe uniforme de type fini . Les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) Γ est de génération compacte .
b) Pour chaque racine ρ_i de G, le triplet (G, Γ, ρ_i) est unifère .

Il diffère du théorème A en ce que toutes les racines de G interviennent dans la condition $b)$, et non les seules racines Γ-critiques .

La démonstration de la variante A" est laissée à la sagacité du lecteur .

Corollaire VI.7 — *On suppose que G est métabélien . Si Γ contient un sous-groupe de type fini, uniforme et de génération compacte, alors Γ est lui-même de génération compacte .*

Immédiate conséquence du théorème A" .

Il n'en va en général pas de même quand G n'est pas métabélien : voir l'exemple A.2 de l'appendice A .

Appendice A — Exemples

Exemple A.1 — Illustrons notre théorème en prenant pour G le plus petit groupe de Lie résoluble non nilpotent . On peut le voir comme $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ muni de la structure du produit semi-direct :

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + a_1 b_2)$$

Les homomorphismes continus de G dans $\mathbf{R}$ sont les $\chi : (a, b) \mapsto k \ln(a)$ avec $k \in \mathbf{R}$, donc $\chi^{-1}(]0, +\infty[) =]0, 1[\times\mathbf{R}$ ou $]1, +\infty[\times\mathbf{R}$. Les racines sont $(a, b) \mapsto 1$ et $(a, b) \mapsto a$. On voit aisément qu'elles sont critiques pour tout sous-groupe uniforme de G . Notre théorème prend donc la forme suivante :

Soit Γ un sous-groupe de type fini uniforme dans G. Considérons le sous -groupe A de $\mathbf{R}_+^*$ image de Γ . Alors Γ est de génération compacte si et seulement si :

i) On peut trouver des éléments de $A\cap]0,1[$ qui aient une combinaison linéaire entière égale à 1 ;

ii) On peut également trouver des éléments de $A\cap]1,+\infty[$ qui aient une combinaison linéaire entière égale à 1 .

Examinons quelques cas typiques .

Choisissons pour Γ une partie génératrice finie $\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$. Donc A est le groupe multiplicatif engendré par les a_i . Comme Γ est uniforme dans G, A n'est pas réduit à $\{1\}$.

Γ est polycyclique exactement quand les éléments de A sont tous des unités algébriques (proposition VI.2) .

Cas 1 — Les a_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$. Les relations linéaires demandées en i) et ii) ne peuvent exister car ce seraient des relations algébriques non triviales entre les a_i . Donc Γ n'est pas de génération compacte.

Appliquons maintenant la proposition B1 : nous retrouvons en corollaire un résultat de [G] : Γ dans ce cas n'est pas groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie .

Cas 2 — A contient une unité algébrique $a \neq 1$. On a donc deux relations linéaires à coefficients entiers entre puissances de a, du type :

$$a^p = \mu_{p-1}a^{p-1} + \mu_{p-2}a^{p-2} + ... + \mu_0$$
$$a^{-q} = \nu_{q-1}a^{-q+1} + \nu_{q-2}a^{-q+2} + ... + \nu_0$$

Divisons la première par a^p et multiplions la seconde par a^q :

$$1 = \mu_{p-1}a^{-1} + \mu_{p-2}a^{-2} + ... + \mu_0 a^{-p}$$
$$1 = \nu_{q-1}a + \nu_{q-2}a^2 + ... + \nu_0 a^q$$

Les puissances positives de a appartiennent à $]1,+\infty[$ et les puissances négatives à $]0,1[$, ou l'inverse, donc ces deux relations linéaires montrent que Γ est de génération compacte .

Cas 3 — Supposons A cyclique : $A = \{\ a^n\ /\ n \in \mathbf{Z}\ \}$. Alors Γ est de génération compacte si et seulement si a est une unité algébrique (corollaire II.6) .

Cas 4 — Les a_i sont rationnels . Alors Γ est de génération compacte si et seulement si A n'est pas cyclique .

C'est une agréable application de l'identité de Bezout : considérons $\chi = \log|_A : A \to \mathbf{R}$, et pour chaque nombre premier p la valuation p-adique $\nu_p : A \to \mathbf{Z}$. L'identité de Bezout traduit la condition $i)$ (resp. $ii)$) en *pour tout p, il y a un élément a de A tel que $\chi(a) < 0$ (resp. > 0) et $\nu_p(a) \leq 0$* . Pensons à A comme à un réseau sur lequel sont définies les formes linéaires χ, ν_p : cela revient à dire que χ n'est proportionnelle à aucune des ν_p . Si χ est proportionnel à ν_p, alors $\chi(A)$ est cyclique, autrement dit A est cyclique . Inversement si A est cyclique alors toutes les formes linéaires sont proportionnelles .

Noter que dans le cas 4, Γ ne contient jamais de sous-groupe polycyclique qui soit uniforme dans G .

Cas 5 — Donnons-nous un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X_1, X_2, ..., X_n]$, irréductible sur $\mathbf{C}$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n)$ un point générique de l'hypersurface algébrique :

$$P(X_1, X_2, ..., X_n) = 0$$

De sorte que les relations algébriques entre les a_i sont toutes multiples de P . Dans ce cas on a le critère suivant :

Ordonnons l'ensemble des monômes de coefficient non nul dans P par la règle :

$$X_1^{i_1}...X_n^{i_n} < X_1^{j_1}...X_n^{j_n} \textit{ si et seulement si } a_1^{i_1}...a_n^{i_n} < a_1^{j_1}...a_n^{j_n}$$

Γ est de génération compacte si et seulement si le plus grand et le plus petit monôme ont ± 1 pour coefficient dans P .

En effet, si cette condition est remplie, alors après division par le plus grand monôme, la relation $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ est la relation demandée en i) . De même, après division par le plus petit monôme, la relation $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ est la relation demandée en ii) .

Si au contraire le plus grand (resp. le plus petit) monôme est affecté d'un coefficient $\nu \neq \pm 1$, alors dans toute relation algébrique à coefficients entiers entre les a_i, le plus grand (resp. le plus petit) monôme sera affecté d'un coefficient multiple de ν . Donc la relation demandée en i) (resp. ii)) ne peut exister .

Noter que dans le cas 5, quand $n \geq 2$, Γ ne contient pas de sous-groupe polycyclique qui soit uniforme dans G .

Exemple A.2 — Les théorèmes A et A' et leur démonstration suggèrent la question suivante : notre théorie ne se réduirait-elle pas au cas métabélien ? Plus précisément, étant donnés deux sous-groupes de type fini uniformes dans un même groupe de Lie résoluble G, s'ils ont même image dans G/G'' et si l'un d'eux est de génération compacte, l'autre l'est-il aussi ? L'exemple suivant montre que la réponse est *négative* .

G est simplement le groupe des matrices $(a_{i,j})$ réelles 3×3 triangulaires supérieures à éléments diagonaux strictement positifs .

On fixe deux réels strictement positifs t, t' algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et une unité algébrique réelle strictement positive u autre que 1 . Pour chaque réel s on considère le sous-groupe Γ_s de G engendré par :

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons voir que Γ_s est de génération compacte ou non suivant la valeur de s . On voit aisément que Γ_s est défini par les conditions suivantes :

$a_{1,1}$ et $a_{3,3}$ appartiennent au groupe multiplicatif engendré par t et t' ;

$a_{2,2}$ appartient au groupe multiplicatif engendré par t et u ;

$a_{3,2}$ et $a_{2,3}$ appartiennent au sous-anneau $A = \mathbf{Z}[t, t^{-1}, t', t'^{-1}, u, u^{-1}]$ de $\mathbf{R}$ engendré par t, t', u et leurs inverses ;

$a_{1,3}$ appartient au groupe additif $A + As$.

Noter que Γ_s est dense dans G . Les racines de G sont $\rho_1 : (a_{i,j}) \mapsto a_{1,1}a_{3,3}{}^{-1}$, $\rho_2 : (a_{i,j}) \mapsto a_{1,1}a_{2,2}{}^{-1}$, $\rho_3 : (a_{i,j}) \mapsto a_{2,2}a_{3,3}{}^{-1}$, $\rho_4 = \rho_5 = 1$.

(G, Γ_s, ρ_4) et (G, Γ_s, ρ_5) sont trivialement unifères !

On constate que pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, $\Gamma_s \cap \ker(\rho_i)$ est uniforme dans $\ker(\rho_i)$. Nous pouvons donc appliquer le critère II.7 : *(G, Γ_s, ρ_i) est unifère si et seulement si 1 est combinaison linéaire entière d'éléments de $\rho_i(\Gamma_s) \cap]0, 1[$, ainsi que d'éléments de $\rho_i(\Gamma_s) \cap]1, +\infty[$* .

Ce critère est vérifié par ρ_2 et ρ_3 car $\rho_2(\Gamma_s) = \rho_3(\Gamma_s)$ contient l'unité algébrique $u \neq 1$. Mais il n'est pas vérifié par ρ_1 car $\rho_1(\Gamma_s)$ est le groupe multiplicatif engendré par t et t' qui sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Donc d'après notre théorème A, Γ_s est de génération compacte précisément quand ρ_1 n'est pas Γ-critique — c'est-à-dire, puisque $G_0 = \{1\}$ et $G_1 = G''$, quand $\Gamma \cap G'' \neq (\Gamma \cap G')'$. Or $\Gamma \cap G''$ est défini par $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 1$, $a_{2,3} = a_{3,2} = 0$ et $a_{1,3} \in A + As$, tandis que $(\Gamma \cap G')'$ est défini par $a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = 1$, $a_{2,3} = a_{3,2} = 0$ et $a_{1,3} \in A$. Donc Γ_s est de génération compacte précisément quand s appartient à A .

Noter enfin que Γ_s contient Γ_0, ce qui fournit, quand s n'appartient pas à A, un exemple de sous-groupe de G (de type fini, dense) qui n'est pas de génération compacte mais contient un sous-groupe (de type fini, dense dans G) qui est de génération compacte .

Appendice B — Génération compacte des groupes d'holonomie de feuilletages de Lie

Soit G un groupe de Lie, M une variété différentielle *compacte* connexe, et $\mathcal{F}$ un feuilletage de M (dont la codimension est la dimension de G) .

$\mathcal{F}$ est un *G-feuilletage de Lie* s'il est défini par un ensemble de submersions locales $f_i : U_i \to G$, dont chaque difféomorphisme de transition h_{ij} (défini par $h_{ij} \circ f_i = f_j$) est la restriction à $f_i(U_i \cap U_j)$ d'une translation à gauche de G .

Par un argument classique d'Ehresmann, il existe un sous-groupe Γ de G (le *groupe d'holonomie* de $\mathcal{F}$), ainsi qu'un revêtement $p : \bar{M} \to M$ galoisien connexe de groupe Γ (le *revêtement d'holonomie* de $\mathcal{F}$) et une submersion $D : \bar{M} \to G$ (le *développement* de $\mathcal{F}$) qui est Γ-équivariante, telle que le feuilletage défini sur $\bar{M}$ par D coïncide avec $p^{-1}(\mathcal{F})$.

Si l'on munit G d'une métrique riemannienne invariante à gauche et M d'une métrique bien choisie, que l'on relève à $\bar{M}$, alors D est une *submersion riemannienne* entre variétés riemanniennes complètes. Donc D est une fibration .

Par exemple supposons un autre groupe de Lie H contenant un sous-groupe discret cocompact Γ, et un homomorphisme surjectif q de H sur G . Notons K le noyau de q . Alors les classes bilatères $\Gamma\eta K$, $\eta \in H$, sont les feuilles d'un G-feuilletage de Lie de $M = \Gamma\backslash H$ dont le groupe d'holonomie est $q(\Gamma)$. Dans le cas où $\Gamma \cap K = \{1\}$, le revêtement d'holonomie est H et l'application développante est q .

Revenons au cas général . Il est clair que Γ est de type fini . De plus il est uniforme dans G car si l'on note $\bar{\Gamma}$ sa fermeture dans G, la fibration D passe au quotient en une fibration de M sur $\bar{\Gamma}\backslash G$, qui est donc compact .

Proposition B.1 (Haefliger) — *Soit Γ le groupe d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie défini sur une variété compacte . Alors Γ est de génération compacte dans G .*

La démonstration qui suit est dûe à Y. Carrière . Choisissons dans $\bar{M}$ un compact P rencontrant $D^{-1}(1)$ et qui soit un domaine fondamental, c'est-à-dire que les translatés $\gamma(P)$, $\gamma \in \Gamma$, recouvrent $\bar{M}$. L'ensemble $\mathcal{G}$ des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(P) \cap P \neq \emptyset$ est une partie génératrice finie de Γ .

Donnons-nous un $K \in \mathcal{K}\ (G)$, que nous pouvons supposer connexe par arcs et contenant 1 . Soit γ un élément quelconque de $\Gamma \cap K$.

Comme D est équivariante, $\gamma(P)$ rencontre $D^{-1}(\gamma)$. Donc P et $\gamma(P)$ rencontrent $D^{-1}(K)$. Nous pouvons supposer G simplement connexe, si bien que les fibres de D sont connexes, et finalement $D^{-1}(K)$ est connexe par arcs . Donc P et $\gamma(P)$ peuvent être joints par un chemin dans $D^{-1}(K)$. Les translatés de P rencontrés successivement par ce chemin forment précisément une suite du type : $P, \gamma_1(P), \gamma_1\gamma_2(P), ..., \gamma_1...\gamma_n(P)$ où $\gamma_i \in \mathcal{G}$ et $\gamma_1...\gamma_n = \gamma$.

Pour chaque $i \in \{0, ..., n\}$, le translaté $\gamma_1...\gamma_i(P)$ rencontre $D^{-1}(K)$. En d'autres termes $\gamma_1...\gamma_i D(P)$ rencontre K . Donc $\gamma_1...\gamma_i \in KD(P)^{-1}$.

Nous avons ainsi prouvé que $\Gamma \cap K \subset \langle \mathcal{G} \rangle_{KD(P)^{-1}}$.

Références

[BNS] Bieri, R., Neumann, W.D., Strebel, R. — "A Geometric Invariant of Discrete Groups" . *Invent. Math.* 90, 451–477 (1987) .

[BS] Bieri, R., Strebel, R. — "Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups" . *Proc. London Math. Soc.* 3, 41 (1980), 439–464

[C1] Carrière, Y. — "Sur la croissance des feuilletages de Lie" . *Pub. IRMA Lille* , vol. VI, fasc..3 (1984) .

[C2] Carrière, Y. — "Feuilletages riemanniens à croissance polynomiale" . *Comm. Math. Helv.* 63 (1988), 1–20 .

[G] Ghys, E. — "Groupes d'holonomie des feuilletages de Lie" . *Indag. Math.*, vol.47, fasc. 2 (1985), 173–182 .

[Hae1] Haefliger, A. — "Groupoïdes d'holonomie et classifiants" . *In Structure transverse des feuilletages* , Astérisque 116 .

[Hae2] Haefliger, A. — "Pseudogroups of Local Isometries" . *In Proceedings Vth. Coll. in Diff. Geometry, Santiago de Compostella, Sept. 1984* , ed. L.A. Cordero, *Research notes in Math.* 131, Pitman (1985), 174–197 .

[Hal] Hall, M. Jr. — "The Theory of Groups" . Mc Millan (1959) .

[Mo] Mostow, G.D. — "Factor Spaces of Solvable Groups" . *Annals of Mathematics* , vol. 60, no. 1 (1954) .

[R] Ragunathan, M.S. — "Discrete Subgroups of Lie Groups" . Springer (1972) .

[Y] Yamabe, H. — "On an Arcwise Connected Subgroup of a Lie Group" . *Osaka Mathematical Journal*, vol. 2, no. 1 (1950) .

U.F.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05, France